

**ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN UND
VERKEHRSGRÖSSEN VON VERMITTLUNGSSTELLEN
UND DEREN KOPPELANORDNUNGEN**

von

WERNER DIRLEWANGER

aus Kempten/Allgäu



Digitized by the Internet Archive
in 2026

ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN UND VERKEHRS-
GRÖSSEN VON VERMITTLUNGSSTELLEN UND DEREN
KOPPELANORDNUNGEN

Der Technischen Fakultät der
Universität Erlangen-Nürnberg

zur Erlangung des Grades

D O K T O R - I N G E N I E U R

vorgelegt von

Werner Dirlewanger

Erlangen, 1971



Als Dissertation genehmigt von der
Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 22.10.1971

Tag der Promotion : 16.05.1972

Dekan : Prof. Dr.-Ing. O. Molerus

Berichterstatter : Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen
Prof. Dr. rer.nat. K. Jacobs
Prof. Dr. V. E. Beneš

INHALTSVERZEICHNIS

	<u>Seite</u>
ÜBERBLICK	6
I. GRUNDLAGEN AUS VERMITTLUNGSTECHNIK UND VERKEHRSTHEORIE	11
1. Bemerkungen zur Vermittlungstechnik	11
1. Das Vermittlungsproblem	11
2. Die grundsätzliche Lösung des Vermittlungsproblems	14
3. Koppelanordnungen	17
4. Die Struktur von Vermittlungsstellen	23
5. Spannweiten der Steuerung	26
6. Warte- und Verlustsysteme	27
7. Erreichbarkeit und Stufenzahl von Koppelanordnungen	28
8. Verlustrufe	33
2. Mathematische Modelle	35
3. Das Verkehrsgeschehen als stochastischer Prozess	39
4. Verkehrsgrößen und ihre Bestimmung	47
II. BERECHNUNG DER ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN UND VERKEHRSGRÖßEN VON VERMITTLUNGSSTELLEN MIT FÄCHERSTRUKTUR	51
1. Das betrachtete System	51
1. Beschreibung der betrachteten Klasse von Vermittlungsstellen	51
2. Bildung eines mathematischen Modells	54
2. Die Zustandsgleichungen	60
1. Die Beschreibung des Zustands und der Zustandsraum	60
2. Die Übergangswahrscheinlichkeiten	63
3. Aufstellung der Zustandsgleichungen	67
3. Lösung der Zustandsgleichungen	70
1. Die Lösung	70
2. Bemerkungen	74
4. Verkehrsgrößen	77
1. Verkehrsgrößen für den von der i-ten Quellengruppe zur j-ten Endabnehmergruppe gehenden Verkehrsstrom	77
2. Verkehrsgrößen für die Verkehrsströme von Leitungsbündeln	84
5. Unvollkommene Erreichbarkeit	86

III. DIE BETRIEBSBEDINGUNGEN DER KOPPELANORDNUNGEN

INNERHALB DER VERMITTLUNGSSTELLE	88
Vorbemerkung zu Teil III	88
1. Der stochastische Prozess in einem rufeliefernden Teil der Vermittlungsstelle	90
1. Der stochastische Prozess in "Teil 1"	90
2. Zustandsgleichungen für den Teil 1	94
2. Der stochastische Prozess in einem angerufenen Teil der Vermittlungsstelle	98
1. Der stochastische Prozess in "Teil 2"	98
2. Zustandsgleichungen für den Teil 2	100
3. Die Hemmungsfunktion	105
1. Einschränkende Voraussetzungen	105
2. Die neue Form der Geburts- und Sterbekoeffizienten	107
3. Definition der Hemmungsfunktion	110
4. Berechnung der Hemmungsfunktion	112
4. Die Quellfunktion	114
1. Einschränkende Voraussetzungen	114
2. Die neue Form der Geburts- und Sterbekoeffizienten	115
3. Definition der Quellfunktion	119
4. Berechnung der Quellfunktion	120
5. Die Betriebsbedingungen der Koppelanordnungen innerhalb der Vermittlungsstelle	122
1. Entwicklung von Voraussetzungen	122
2. Die Betriebsbedingungen der Koppelanordnungen innerhalb der Vermittlungsstelle	124
3. Berechnung der Richtungswahrscheinlichkeit	127
4. Zusammenfassung und Bemerkungen	130
6. Untersuchung der Koppelanordnungen für die innerhalb der Vermittlungsstelle auftretenden Betriebsbedingungen	132
1. Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten der Koppelanordnungen	132
2. Verkehrsgrößen der Koppelanordnungen	134
7. Ein Algorithmus zur schnelleren numerischen Berechnung der Betriebsbedingungen	138
1. Quellfunktion bzw. Hemmungsfunktion bei der Abspaltung einzelner Koppelanordnungen	138
2. Der Algorithmus	143
3. Vereinfachungen	148

	<u>Seite</u>
8. Unvollkommene Erreichbarkeit	151
9. Praktische Erfahrungen und ein Beispiel	152
1. Praktische Erfahrungen	152
2. Ein Beispiel	154
ANHÄNGE	164
Zusammenstellung der verwendeten Abkürzungen	164
Zusammenstellung der im Teil I verwendeten Formelzeichen	165
Zusammenstellung der im Teil II verwendeten Formelzeichen	167
Zusammenstellung der im Teil III verwendeten Formelzeichen	169
A 1 Anhang zu Abschn. III.1.2	173
A 2 Anhang zu Abschn. III.3.2	186
Schrifttumsverzeichnis	218
Lebenslauf	220

ÜBERBLICK

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Analyse der Leistungsfähigkeit von Wählvermittlungsstellen eines bestimmten Typs.

Dieser läßt sich wie folgt charakterisieren: Die Vermittlungsstelle ist aus einzelnen Koppelanordnungen aufgebaut. Der Vermittlungsaufbau, d.h. die Wegesuche im und die Durchschaltung durch das Sprechwegenetz erfolgen schrittweise von Koppelanordnung zu Koppelanordnung und nicht etwa "konjugiert" über alle Stufen. Ferner arbeiten die Vermittlungsstellen als Verlustsysteme. Kann ein Ruf während des Verbindungsaufbaues an irgendeiner Koppelanordnung nicht weiterverbunden werden - z.B. weil momentan keine freie Verbindungsleitung zur Verfügung steht - dann wird der Ruf zum Verlustruf und der rufende Teilnehmer erhält das Besetztzeichen. In Deutschland z.B. gehören viele Ortsvermittlungsstellen und Nebenstellenanlagen zu dem so charakterisierten Typ.

Zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit von Vermittlungsstellen dienen Verkehrsgrößen. Diese sind bei Verlustsystemen z.B. der "Verlust" (das ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf verlorenght) oder die "Bündelbelastung" (das ist die mittlere Anzahl gleichzeitig belegter Leitungen eines Leitungsbündels).

Die Verkehrsgrößen hängen einerseits von Aufbau und Funktionsweise der Vermittlungsstelle und andererseits vom Verkehrsbedürfnis und den Gewohnheiten der Teilnehmer ab. Um Verkehrsgrößen zu ermitteln, erstellt man zweckmäßigerweise für das aus den Teilnehmern und der Vermittlungsstelle bestehende System ein mathematisches Modell. Es soll alle wesentlichen Eigenschaften des wirklichen Systems möglichst genau nachbilden. Für dieses Modell sind die Verkehrsgrößen dann zu ermitteln.

Die Ereignisse "Zeitpunkt des Rufes eines Teilnehmers", "Wahl des angerufenen Teilnehmers", "Dauer des Gesprächs" usw. haben vom Standpunkt der Vermittlungsstelle aus gesehen einen weitgehend zufälligen Charakter. Die Reaktionen in der Vermittlungsstelle auf solche Ereignisse sind dagegen von deterministischer Natur, z.B. die Art und Weise in der die Vermittlungsstelle bei einem Ruf versucht, die Verbindung zum angerufenen Teilnehmer herzustellen. Dementsprechend hat man in einem mathematischen Modell das Teilnehmerverhalten durch statistische Eigenschaften zu beschreiben, die Arbeitsweise der Vermittlungsstelle jedoch funktional. Das im Modell ablaufende Verkehrsgeschehen ist dann ein stochastischer Prozeß von im allgemeinen sehr komplizierter Natur.

Um die Verkehrsgrößen für ein bestimmtes Modell rechnerisch zu bestimmen, ist es im allgemeinen notwendig, gewisse Übergangs- und Zustandswahrscheinlichkeiten des stochastischen Prozesses zu bestimmen. Zu deren Berechnung ist - bei den in der Fernsprechverkehrstheorie üblichen Modellvorstellungen - im allgemeinen ein lineares Gleichungssystem zu lösen. In diesem ist die Zahl der Unbekannten auch bei sehr kleinen Vermittlungssystemen schon so groß, daß beim Versuch einer numerischen Lösung die Möglichkeiten elektronischer Rechenanlagen bei weitem überschritten werden.

Ein Ausweg besteht darin, daß man versucht, die Verkehrsgrößen für das Modell wenigstens näherungsweise zu berechnen. Eine sehr bekannte Näherungsmethode für die hier betrachteten Vermittlungssysteme ist die Methode der "abschnittsweisen Rechnung" unter Zugrundelegung der für "isoliert betrachtete" Koppelanordnungen gültigen Verlustformeln (siehe z.B. [26]). Eine andere Möglichkeit ist, das Verkehrsgeschehen im mathematischen Modell des zu betrachtenden Vermittlungssystems auf einer elektronischen Rechenanlage zu simulieren. Dabei werden Pseudo-Zufallszahlen verwendet. Zu Werten der gesuchten Verkehrsgrößen kommt man dann mit Hilfe der mathematischen Statistik.

Die gewonnenen Werte sind jedoch mit Vertrauensintervallen behaftet und gelten nur mit einer bestimmten Aussagesicherheit. Demgegenüber befaßt sich die vorliegende Arbeit damit, Verkehrsgrößen für mathematische Modelle von Vermittlungsstellen des oben geschilderten Typs exakt und nicht genähert zu berechnen. Bisher war es nur für sehr einfache diesbezügliche mathematische Modelle gelungen, die Lösung des allgemeinen Gleichungssystems explizit in einer Form anzugeben, deren numerische Auswertung wesentlich weniger Zeit beansprucht als die numerische Lösung des entsprechenden Gleichungssystems. In der vorliegenden Arbeit werden nun solche explizite Lösungen für ein sehr allgemeines Modell des betrachteten Typs von Vermittlungsstellen angegeben und die Verkehrsgrößen exakt berechnet.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in drei Teile, deren Inhalt nun kurz erläutert sei:

Teil I ist für den in das Sondergebiet "Fernsprechverkehrstheorie" nicht speziell eingearbeiteten Leser gedacht (und braucht also ggf. nur kurz überflogen zu werden). Es sind Grundlagen aus der Vermittlungstechnik und Fernsprechverkehrstheorie zusammengestellt, von denen später Gebrauch gemacht wird und es wird klargelegt, welcher Bedeutungsinhalt verwendeten speziellen Begriffen zugrunde liegt.

Im Teil II wird - unter Zugrundelegung der in der Fernsprechverkehrstheorie üblichen Modellvorstellungen - ein mathematisches Modell für Vermittlungsstellen des eingangs geschilderten Typs entwickelt. Dabei wird davon ausgegangen, daß die Struktur der Vermittlungsstelle fächerförmig ist und die verwendeten Koppelanordnungen vollkommene oder unvollkommene Erreichbarkeit haben. Bei den Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit wird vorausgesetzt, daß sie einstufig sind und durch die Modellvorstellung der "Durchlaßwahrscheinlichkeiten" beschrieben werden können. Für die Erzeugung der an der Vermittlungsstelle ankommenden Rufe wird eine sehr allgemeine Modellvorstellung verwendet, die sowohl das Modell der

"unendlichen Quellenzahl" wie auch das der "endlichen Quellenzahl" als Sonderfall einschließt. Weiterhin wird im Modell berücksichtigt, daß die von der Vermittlungsstelle abgehenden Rufe u.U. noch Hemmungen erleiden, z.B. wenn sie in ein übergeordnetes Wählnetz abgehen. Die Zustandsgleichungen werden aufgestellt und ihre Lösung in Form einer allgemeinen, expliziten Formel hergeleitet. Damit können in einfacher Weise allgemeine, exakte, geschlossene Formeln für die interessierenden Verkehrsgrößen angegeben werden.

Der Teil III befaßt sich mit folgendem Problem: Die im Teil II für die Verkehrsgrößen gefundenen Formeln sind geschlossene Ausdrücke. Es lassen sich mit diesen Ausdrücken die Verkehrsgrößen zwar exakt berechnen, die numerische Ausrechnung ist jedoch nur für relativ kleine Systeme möglich. Um größere Systeme berechnen zu können, werden die Voraussetzungen über das Teilnehmerverhalten im Teil III gegenüber Teil II etwas eingeschränkt. Es wird dann ein Verfahren entwickelt, das sich auf Ergebnisse des Teils II stützt, jedoch im übrigen einen völlig neuen Weg einschlägt: Die genannte Einschränkung der Voraussetzungen bewirkt, daß die Betriebsbedingungen der Koppelanordnungen (das sind die statistischen Eigenschaften der ankommenden Rufe und der auf die abgehenden Rufe einwirkenden Hemmungen) jetzt vom Typ des Gesamtsystems, also dem der Vermittlungsstelle sind. Also kann man die Verkehrsgrößen berechnen, indem man die in Teil II entwickelten Formeln auf die durch je eine Koppelanordnung gebildeten Teilsysteme anwendet. Um zu numerischen Werten der Verkehrsgrößen zu kommen wird ein Algorithmus entwickelt, der eine vergleichsweise schnelle Berechnung der Betriebsverhältnisse für alle Koppelanordnungen ermöglicht. Die so numerisch noch berechenbaren Vermittlungsstellen sind - für gleichen Rechenzeitaufwand - wesentlich größer als bei Anwendung der allgemeinen Formeln von Teil II. Die Rechenergebnisse sind ebenfalls exakt und nicht genähert. In Abschnitt III.9 sind Angaben darüber zu finden, wie große Systeme unter Verwendung heutiger mittelgroßer elektronischer Rechanlagen noch berechnet werden können.

Schließlich sei noch erwähnt, daß mit der Berechnung der Betriebsverhältnisse der Koppelanordnungen gemäß Teil III auch das folgende schon lange interessierende Problem exakt und nicht etwa nur näherungsweise gelöst ist: Unseres Wissens ist in der Literatur bisher nichts bekannt geworden, wie die Ruferzeugung sogenannter "geglätteter Verkehre" exakt beschrieben werden kann. Geglättet nennt man solche Verkehre, die schon einige Koppelanordnungen durchlaufen haben. Die exakte Beschreibung der Betriebsbedingungen der Koppelanordnungen innerhalb der betrachteten Vermittlungsstellen schließt die Beschreibung geglätteter Verkehre ein. Die dabei verwendeten "Quellfunktionen" stellen eine exakte Beschreibung der Ruferzeugung für geglättete Verkehre dar. Sie gilt immer, wenn es sich um eine Vermittlungsstelle der im Teil III betrachteten Klasse handelt.

Der Verfasser möchte Herrn Prof. Dr. R. Unbehauen für seine wertvollen Anregungen und die stetige Unterstützung während der Durchführung der Dissertation besonders herzlich danken.

I. GRUNDLAGEN AUS VERMITTLUNGSTECHNIK UND VERKEHRSTHEORIE

Im Teil I der vorliegenden Arbeit sind später benötigte Grundlagen aus Vermittlungstechnik und Verkehrstheorie zusammengestellt und die Bedeutungsinhalte spezieller Begriffe erklärt (siehe z.B. auch [2], [9], [10], [25], [26], [27], [28]). Dieser Teil ist im wesentlichen für den in die Fernsprechverkehrstheorie nicht speziell eingearbeiteten Leser gedacht und man braucht sich ggf. hierin nur kurz aufzuhalten. Die Bedeutung verwendeter Abkürzungen und Formelzeichen des Teils I ist im Anhang der Arbeit zusammengefaßt.

I. 1 Bemerkungen zur Vermittlungstechnik

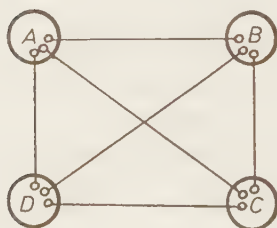
I. 1.1 Das Vermittlungsproblem

Der Wunsch nach Kommunikation, also nach gegenseitigem Austausch von Information, ist ein elementares Bedürfnis des Menschen. Die ihm von Natur aus dazu gegebenen Kommunikationsmittel, z.B. Stimme, Auge, Ohr haben bezüglich der Entfernung, über die eine Kommunikation möglich ist, im allgemeinen sehr enge Grenzen. Die Möglichkeit, Schriftzeichen, gesprochene Worte, Telegrafiezeichen und andere Formen der Information auch über weite Entfernungen mittels elektrischer Leitungen oder drahtlos übertragen zu können, hat die überbrückbaren Entfernungen ganz wesentlich erhöht. Daraus folgte der Wunsch, zwischen immer mehr Orten solche Informationswege einzurichten. Seine Verwirklichungen sind u.a. die Fernsprech- und Fernschreibverbindungen und die elektronische Datenübertragung.

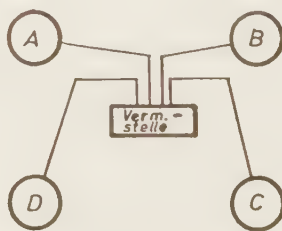
Sind es nur zwei Orte (Teilnehmer), zwischen denen ein Informationsaustausch möglich sein soll, dann genügt es, einen Informationsweg (kurz Leitung) zwischen beiden einzurichten. Sind es drei Teilnehmer und möchte jeder mit jedem Information austauschen können, so ist zwischen je zwei von ihnen eine Leitung einzurichten. Also sind drei

Leitungen nötig. Bei vier Teilnehmern brauchen wir aber schon sechs und bei m Teilnehmern $\binom{m}{2}$ Leitungen. Richtet man auf diese Weise ein Leitungsnetz ein, dann ist die Gesamtlänge der installierten Leitungen schon für kleine Werte von m sehr hoch. Außerdem ist die Gesamtlänge der jeweils neu zu installierenden Leitungen bei Hinzukommen eines neuen Teilnehmers um so größer, je größer m ist.

Leitungen sind sehr kostspielig. Es gibt daneben noch eine ganze Reihe anderer Gründe z.B. technische, die Neuinstallationen von Leitungen und anderen elektrischen Verbindungen um so schwieriger machen, je länger die zu installierende Leitung ist. Diese Gründe zwingen zu einer Gestaltung des Fernsprechnetzes, die die genannten Nachteile möglichst vermeidet. Dazu kann man davon ausgehen, daß die Teilnehmer im allgemeinen nicht gleichzeitig mit mehreren anderen sprechen wollen, sondern nur jeweils mit einem. Also kann man eine zentrale Vermittlungsstelle einrichten, an die jeder Teilnehmer über eine Leitung angeschlossen ist (siehe Bild I.1). Wünscht ein Teilnehmer eine Verbindung zu einem anderen, dann muß er



a) Über direkte Leitungen



b) Über eine zentrale Vermittlungsstelle

Bild I.1 Verbindungswege zwischen vier Teilnehmern

diesen Wunsch der Vermittlungsstelle (kurz VSt) mitteilen

und angeben, mit wem er verbunden werden will. Diese verbindet dann die betreffenden beiden Leitungen und teilt dem gewünschten Teilnehmer mit, daß ein Verbindungswunsch eines anderen Teilnehmers vorliegt. Die Verbindung bleibt so lange bestehen, bis einer der beiden Teilnehmer den Wunsch äußert, sie zu trennen.

Durch die Verwendung einer VSt ist das Fernsprechnetzt unterteilt in Leitungen und VSt. Die von den Teilnehmern zur VSt führenden Leitungen bilden das "Leitungsnetz". Die VSt selbst ist der Ort, an dem die Verbindung zwischen den Teilnehmern hergestellt wird.

Die kleinsten Fernsprechnetze werden durch Nebenstellenanlagen gebildet. Meist sind nur wenige Teilnehmer an sie angeschlossen. Es können aber u.U. auch sehr viele sein, wie z.B. in großen Behörden oder Industriewerken. Große Fernsprechnetze sind im allgemeinen die Ortsnetze. Sie umfassen alle Teilnehmer eines Ortes.

In Orten mit sehr großen Teilnehmerzahlen baut man das Ortsnetz aus mehreren, gegenseitig verbundenen VSt'n auf, von denen jede z.B. 10000 Teilnehmer bedient. Um auch Gespräche von Nebenstellenanlagen zu den Teilnehmern eines Ortsnetzes oder Gespräche von Ort zu Ort führen zu können, sind die Nebenstellenanlagen durch Amtsleitungen mit der Ortsvermittlungsstelle und die Ortsvermittlungsstellen gegenseitig durch Fernleitungen verbunden. Schließlich verbinden internationale Fernleitungen die einzelnen Länder untereinander. Es entsteht so ein übergeordnetes Netz, dessen Knotenpunkte VSt'n sind.

Diese Erwähnung der übergeordneten Netze möge genügen, denn die vorliegende Arbeit befaßt sich mit Problemen, die innerhalb von VSt'n auftreten. Die Aufgabe der VSt soll jedoch noch am Beispiel des technischen Ablaufs eines Telefongesprächs näher erläutert werden. Der Wunsch nach einer Verbindung wird der VSt durch Abheben des Hörers

mitgeteilt. Dazu ist ein Kontakt an der Gabel des Fernsprechapparates angebracht ("Gabelkontakt"). Dieser wird beim Abheben geschlossen und löst in der VSt ein entsprechendes Signal aus. Dann informiert der rufende Teilnehmer die VSt, mit wem er verbunden werden will, indem er die Nummer des gewünschten Teilnehmers wählt. Die VSt stellt daraufhin die Verbindung zur Leitung des Angerufenen her. Dieses Aufbauen der Verbindung geht in der heute üblichen Technik sehr schnell und ist z.B. bei Ortsgesprächen im allgemeinen gleichzeitig mit dem Wählen der letzten Ziffer vollzogen. Nun muß nur noch dem Angerufenen mitgeteilt werden, daß er gewünscht wird. Dies geschieht durch ein Klingelzeichen, das die VSt bei ihm auslöst und das ihn bittet, seinen Hörer abzuheben und zu sprechen. Daß der Angerufene dabei durch das Abheben des Hörers auch den Gabelkontakt betätigt, bewirkt nur das Abstellen des nun überflüssig gewordenen Klingelzeichens. Die Betätigung des Gabelkontakts beim Angerufenen bedeutet ja nicht die Äußerung des Wunsches nach einer Verbindung, sondern nur die Bereitschaft zum Beginn eines von anderer Seite gewünschten Gesprächs. Die Verbindung bleibt nun so lange bestehen, bis sie einer der beiden Gesprächspartner beendet, indem er den Hörer auf die Gabel legt. Dadurch wird in der VSt das Signal zum Trennen der Verbindung ausgelöst.

I. 1.2 Die grundsätzliche Lösung des Vermittlungsproblems

Die für die VSt wesentlichen Signale der Teilnehmer sind einerseits Ruf (Abheben des Hörers) und (wenn der Hörer abgehoben ist) Teilnehmerwahl der rufenden Teilnehmer, andererseits Gesprächsende verbundener Teilnehmerpaare.

Die Aufgabe der VSt ist es, die Verbindungen für die gewünschte Dauer herzustellen. Die prinzipielle Lösung dieser Aufgabe wird im folgenden besprochen.

Dazu kann man außer Acht lassen, daß eine Leitung aus mehreren gleichzeitig zu verbindenden Adern besteht und

sie wie einen einzigen Draht behandeln. An der VSt kommen im Beispiel von Bild I.1 vier Leitungen an. Damit jeder Teilnehmer mit jedem anderen verkehren kann, müssen die Leitungen beliebig paarweise verbunden werden können. Eine sehr naheliegende Lösung wäre, jede Teilnehmerleitung an

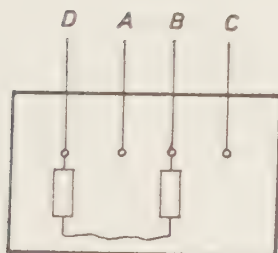


Bild I.2 Prinzip der Handvermittlung

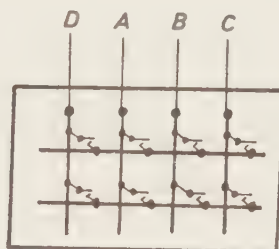


Bild I.3 Beispiel einer automatischen Vermittlung

einer Steckbuchse endigen zu lassen. Dann könnte man mit Steckkabeln beliebige Paare verbinden, wie dies in Bild I.2 für das Teilnehmerpaar D,B dargestellt ist. Das ist das Prinzip der Handvermittlung. Will man den Vermittlungsvorgang automatisieren, dann müssen elektrische Schalter verwendet werden, die automatisch betätigt werden können. Sie müssen so angeordnet werden, daß es möglich ist, die Teilnehmer beliebig paarweise zu verbinden.

Bild I.3 zeigt ein Beispiel dafür. Dort sind, den vier Teilnehmern entsprechend, vier und zwei Leitungsschienen überkreuzt. In jedem Kreuzungspunkt ist ein Schalter angebracht. Möchte z.B. der Teilnehmer D mit B verbunden werden, dann sind in der oberen Reihe der erste und der dritte Schalter von links zu schließen.

Um die in Bild I.3 vorgeschlagene Anordnung funktionsfähig zu machen, muß eine Steuerung hinzukommen, die das Betätigen der Schalter aufgrund der von den Teilnehmern kommenden Signale durchführt. Sie muß weiterhin einige Kontrollfunktionen übernehmen. Z.B. darf ein Verbindungswunsch zu einem Teilnehmer, der schon mit einem anderen verbunden ist, nicht ausgeführt werden (Besetztfall). Die Steuerung hat auch das Klingelsignal bei einem Ange-rufenen auszulösen u.ä..

Damit sind zwei wesentliche Teile gefunden, in die sich jede VSt untergliedert (siehe Bild I.4): Die Steuerung und das "Sprechwegenetz", das für unser Beispiel in Bild I.3 gezeichnet ist.

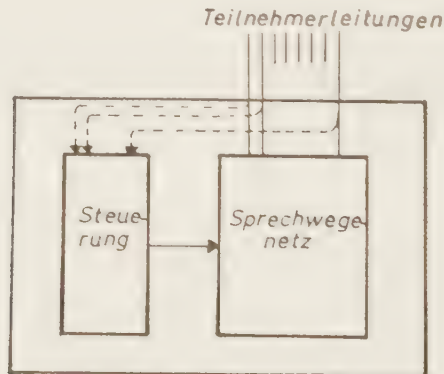


Bild I.4 Prinzipieller Aufbau einer Vermittlungsstelle

Für die Realisierung des Sprechwegenetzes gibt es mehrere Möglichkeiten. Die meist verwendete ist das Raumvielfach, bei dem das Sprechwegenetz durch ein Leitungsnetzwerk und Schalter (z.B. Wähler, Kontakte, elektronische Schalter) realisiert ist. Eine weitere Möglichkeit, deren Anwendung allerdings erst im Kommen ist, ist das Zeitvielfach (Zeit-

multiplexverfahren, siehe z.B. [25]]. Wie das Sprechwegenetz realisiert ist, ist für die verkehrstheoretischen Untersuchungen dieser Arbeit ohne Belang.

I. 1.3 Koppelanordnungen

Ein Sprechwegenetz wie das von Bild I.3 erlaubt es, jeden Teilnehmer mit jedem zu verbinden. Bei m Teilnehmern ist es möglich m^2 (falls m gerade) bzw. $(m-1)/2$ (falls m ungerade) Teilnehmerpaare gleichzeitig zu verbinden. Für dieses Netz braucht man $m^2/2$ bzw. $m(m-1)/2$ Schalter, in der Vermittlungstechnik "Koppelpunkte" genannt. Für größere Teilnehmerzahlen würde diese Lösung einen untragbaren Aufwand an Koppelpunkten im Sprechwegenetz und einen entsprechenden Aufwand in der Steuerung bedeuten. Aus wirtschaftlichen und technischen Gründen muß dieser Aufwand möglichst klein bleiben. Wie man das erreichen kann, zeigt folgende Überlegung.

Einführungsgemäß sprechen nicht alle Teilnehmer gleichzeitig. Vielmehr sprechen im Mittel nur wenige Prozent (z.B. 3 %) gleichzeitig. Die Vermittlungsstelle muß zwar jeden Teilnehmer mit jedem verbinden können, es genügt aber, wenn die maximale Zahl gleichzeitig durchschaltbarer Verbindungen einige Prozente der gesamten Teilnehmerzahl beträgt. Dann muß allerdings in Kauf genommen werden, daß gelegentlich ein Verbindungswunsch nicht bzw. erst später realisiert werden kann, weil die VSt momentan "überlastet" ist. Solche Behinderungen kann man in Kauf nehmen, wenn sie in Grenzen bleiben, etwa wenn nur jeder einhundertste Anrufversuch erfolglos bleibt. Gestaltet man VSt'n unter diesem Gesichtspunkt, dann liegt insbesondere bei größeren Teilnehmerzahlen der Aufwand an Koppelpunkten und für die Steuerung weit unter demjenigen, der für die am Anfang von Abschn. I.1.3 genannte Lösung notwendig wäre. Bei der technischen Realisierung sind zwei prinzipiell verschiedene Wege üblich:

Erstens: Man wendet für das Sprechwegenetz möglichst wenig Koppelpunkte auf, nutzt aber mittels einer sehr leistungsfähigen Steuerung die Schaltmöglichkeiten des Wegenetzes bestmöglich aus (siehe Abschn. I.1.5).

Zweitens: Man unterteilt das Sprechwegenetz dererart in kleinere Einheiten, daß diese vermittlungstechnisch weitgehend selbständige Aufgaben haben. Statt der komplexen zentralen Steuerung benötigt man nun eine Anzahl von Teilsteuerungen mit jeweils vergleichsweise eng begrenzten Aufgaben. Die zu bewältigenden Steuerungsprobleme sind dann nicht mehr so komplex wie beim erstgenannten Verfahren, man wendet jedoch im allgemeinen für gleiche Verkehrsleistung der VSt mehr Koppelpunkte auf als bei Verwendung einer Zentralsteuerung.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich nur mit VSt'n, die entsprechend dem zweitgenannten Verfahren aufgebaut sind. Deshalb soll dieses (an einem Beispiel mit $m=100$ Teilnehmern) näher erläutert werden. Es sollen zehn Verbindungen gleichzeitig möglich sein. Das Sprechwegenetz wird unterteilt in einen Teil $N1$ und einen Teil $N2$ (siehe Bild I.5). Die beiden Teile sind durch ein

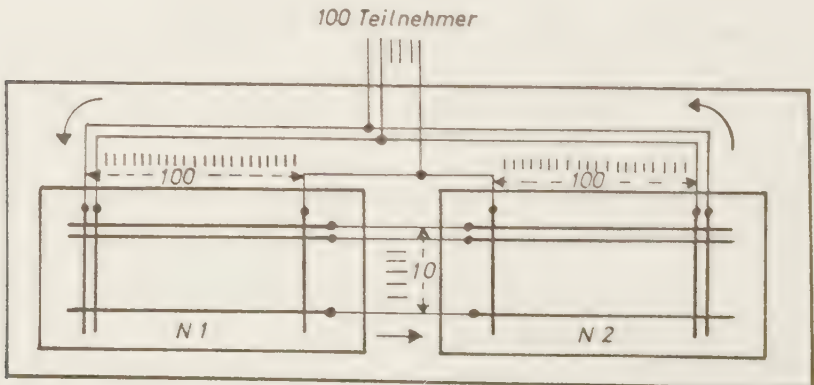


Bild I.5 Verbindungsaufbau in zwei Stufen (die Pfeile deuten die Richtung des Verbindungsaufbaues an)

Bündel von zehn Leitungen verbunden. *N1* dient dazu, die Leitung eines rufenden Teilnehmers mit einer (freien) Leitung des Verbindungsbündels zu verbinden. *N2* dient dazu, diese (Verbindungs-) Leitung mit der Leitung des gerufenen Teilnehmers zu verbinden. Für die Teile *N1* und *N2* kann man im einfachsten Fall matrixähnliche Schalteranordnungen verwenden.

Der gesamte Vermittlungsvorgang läuft also in zwei Schritten ab. Der erste Schritt bedeutet eine "Konzentration" der auf 100 Leitungen eintreffenden Rufe auf ein Bündel von 10 Leitungen. Im Schritt 2 erfolgt dann die Durchschaltung der nun auf 10 Leitungen anliegenden Verbindungswünsche auf die 100, zu den Teilnehmern abgehenden Leitungen, also eine "Expansion".

Man kann die Steuerung der VSt dementsprechend in ebenfalls zwei Teile mit voneinander unabhängigen Aufgaben zerlegen und den Teilen *N1* bzw. *N2* zuordnen. Dies ist in Bild I.6 dargestellt. Teilsteuerung und Teilapwegesetz bilden jeweils zusammen

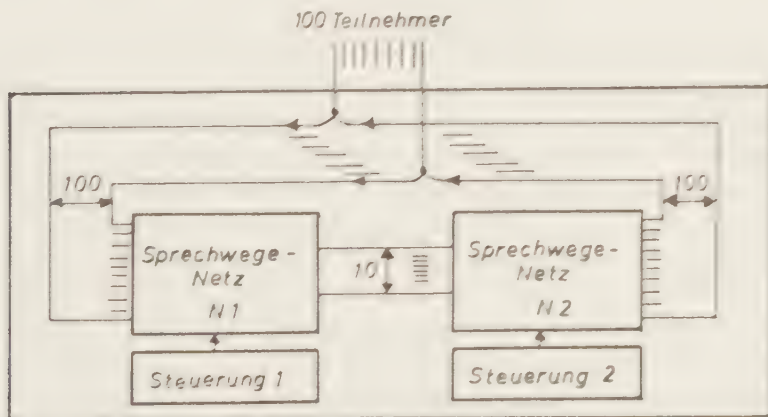


Bild I.6 Untergliederung von Sprechwegenetz und Steuerung

eine "Koppelanordnung" (kurz KAn) genannte Einheit mit weitgehend selbständigen Vermittlungsaufgaben (siehe Bild I.7). Die Teilnehmer erscheinen in dieser Darstellung zweifach: links (an den "Eingängen" der VSt)

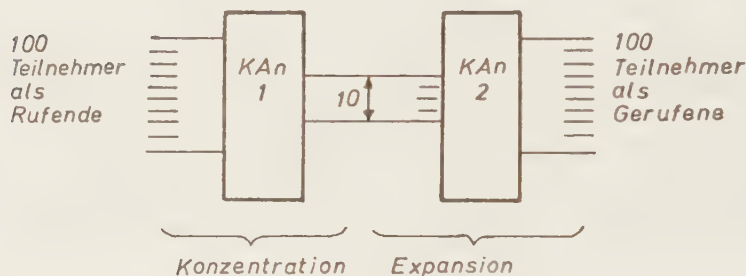


Bild I.7 Aufbau der VSt von Bild I.6 aus KAn'en

als Rufende und rechts (an den "Ausgängen" der VSt) als Angerufene. Der Verbindungsaufbau erfolgt abschnittsweise von links nach rechts von KAn zu KAn. Man spricht deshalb auch von einem einseitig gerichteten Netz.

Bei größeren Teilnehmerzahlen lohnt es sich, Konzentration und Expansion nicht jeweils durch eine KAn zu erledigen, sondern auch hier eine Untergliederung in mehrere KAn'en vorzunehmen. Dies ist am Beispiel von Bild I.8 gezeigt. Man wendet dann im allgemeinen weniger Koppelpunkte auf als bei Verwendung von nur zwei KAn'en. In Bild I.8 dienen die KAn'en 1 bis 10 zur Konzentration: Sie haben jeweils die Aufgabe, einen bis zur KAn durchgeschalteten Rufer auf (irgend) eine freie Leitung des von der KAn abgehenden Bündels durchzuschalten. Die KAn'en 11 bis 21 dienen

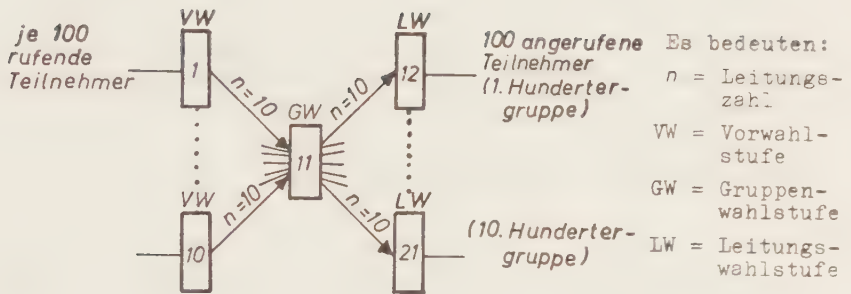


Bild I.8 Beispiel einer größeren VSt (Die Leitungsbündel sind als Striche eingezeichnet; der Pfeil gibt die Richtung der Durchschaltung an.)

zur Expansion, die in zwei Stufen erfolgt: Die von der KAN 11 abgehenden Leitungen sind in mehrere Leitungsbündel aufgeteilt, und jedes Bündel führt über eine weitere KAN zu einer Hundertergruppe von Teilnehmern. Es sei ein Rufender betrachtet, der einen Teilnehmer aus der dritten Hundertergruppe zu sprechen wünscht. Er sei bis zu KAN 11 verbunden. Dann hat KAN 11 die Aufgabe, ihn mit (irgend) einer freien Leitung desjenigen Bündels zu verbinden, das zu KAN 14 führt. KAN 14 hat nun noch die Aufgabe, die Verbindung vollends zum Angerufenen herzustellen.

Man nennt die KAN 11 eine KAN mit Richtungswahl. Die KAN'en 1 bis 10 sind dagegen KAN'en ohne Richtungswahl oder - was dasselbe ist - sie haben nur eine einzige abgehende Richtung. In dieser Auffassung sind die KAN'en 12 bis 21 Richtungs- wahlstufen mit je 100 abgehenden Richtungsbündeln, wobei

jedes Richtungsbündel nur eine einzige Leitung enthält. Solche KAN'en nennt man auch Leitungswahlstufen.

In Verallgemeinerung der betrachteten Beispiele gilt: Die KAN ist eine Vermittlungseinrichtung mit einer Zahl von Eingängen ("Zubringerleitungen") und einer Zahl von Ausgängen ("Abnehmerleitungen"). Die Gesamtzahl der Zubringerleitungen kann in mehrere Leitungsbündel ("Zubringerbündel") aufgeteilt sein. Die Gesamtzahl der Abnehmerleitungen kann in mehrere Leitungsbündel ("Abnehmerbündel", auch "Richtungsbündel" genannt) unterteilt sein.

Aufgabe der KAN ist es, eine bis zu einer ihrer Zubringerleitungen durchgeschaltete Verbindung zu einer ihrer (freien) Abnehmerleitungen weiterzuverbinden. Hat die KAN mehrere Abnehmerbündel, dann muß eine Information vorliegen ("Richtungswunsch"), aus welchem Abnehmerbündel die freie Leitung, zu der weiterzuverbinden ist, genommen werden soll. Diese Information steht aus der gewählten Rufnummer zur Verfügung. Derjenige Eingang und derjenige Ausgang der KAN, die dann miteinander verbunden sind, können während des Bestehens des Gesprächs natürlich nicht für andere Verbindungen herangezogen werden. Zu welcher freien Leitung eines gewünschten Abnehmerbündels ein an der KAN angekommener Ruf durchgeschaltet wird, bleibt der Steuerung der KAN überlassen. Die Aufgabe lautet ja nur, zu (irgend) einer der freien Leitungen des betreffenden Richtungsbündels durchzuverbinden. Wie man Sprechwegenetze von KAN'en aufbaut und welches ihre charakteristischen Merkmale sind, wird später besprochen. Eine Realisierung mit matrixähnlichen Schalteranordnungen, wie z.B. in Bild I.5, ist nur eine von vielen Möglichkeiten. Der allgemeine Typ einer KAN hat also (vergl. Bild I.9) $s \geq 1$ Zubringerbündel, deren Leitungszahlen mit n_{zi} , $i=1,2,\dots,s$ bezeichnet seien und $r \geq 1$ Abnehmerbündel (Richtungsbündel), deren Leitungszahlen n_{Aj} , $j=1,2,\dots,r$ seien. KAN'en im Konzentrationsabschnitt haben keine

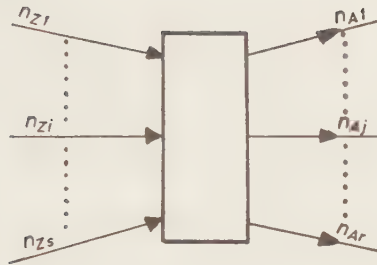


Bild I.9 Allgemeine KAN (Die Bündel sind durch Striche dargestellt)

Richtungswahl, d.h. nur eine abgehende Richtung, also $r=1$. Die jeweils letzten KAN'en im Verbindungsaufbau sind die Leitungswahlstufen. Sie sind KAN'en mit sehr vielen abgehenden Richtungsbündeln mit jeweils nur einer Leitung.

I. 1.4. Die Struktur von Vermittlungsstellen

VSt'n der in Abschn. I.1.3 beschriebenen Art mit schrittweisem Verbindungsaufbau über mehrere KAN'en bestehen aus einem Konzentrations- und einem Expansionsabschnitt. Konzentration und Expansion erfolgen im allgemeinen in mehreren Stufen.

Je nach Gestalt der VSt werden zwischen der letzten KAN des Konzentrationsabschnittes und den Leitungswahlstufen (kurz LW) mehrere KAN'en mit Richtungswahl durchlaufen. Man nennt diese in der Reihenfolge des Verbindungsaufbaus I., II., ... Gruppenwahlstufe (kurz I.GW, II.GW, ...). Bild I.10 zeigt ein Beispiel einer VSt.

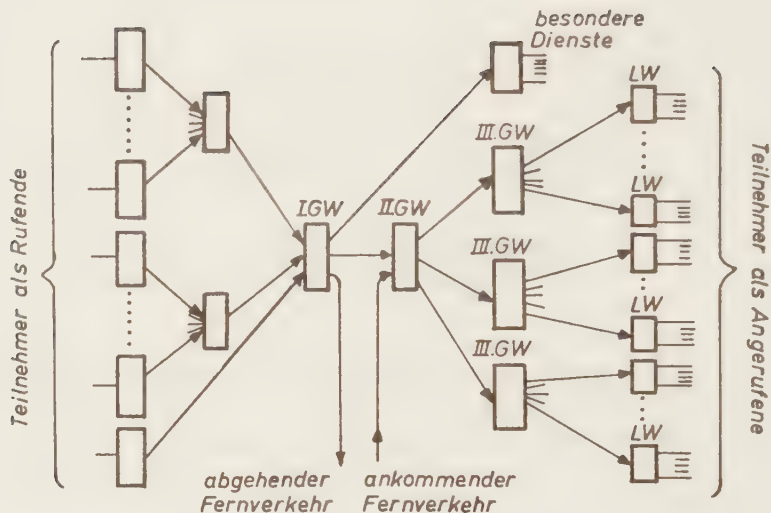


Bild I.10 Beispiel einer VSt

Anmerkung:

In sehr vielen VSt'n der Deutschen Bundespost sind die KAN'en aus sogenannten direkt gesteuerten Wählern aufgebaut. Das bedeutet, daß sie direkt durch die Wählimpulse der Nummernscheibe betätigt werden. Die "Gruppierung" der VSt ist "dekadisch". Dann entsprechen die Nummern der von den Gruppenwahlstufen abgehenden Richtungs-bündel den Ziffern in der Rufnummer. Wenn die Nummern z.B. 5-stellig sind, entsprechen sich im Beispiel von Bild I.10:

I.GW	und	10000er Stelle
II.GW	und	1000er Stelle
III.GW	und	100er Stelle

Die Leitungswahlstufen haben dann üblicherweise 100 abgehende Leitungen, die den letzten beiden Stellen entsprechen.

Man kann jedoch auch anders verfahren und die VSt nicht dekadisch gruppieren. Dann hat die Steuerung jeder KAN aus der gewählten Rufnummer die Nummer des abgehenden Richtungs-bündels zu bestimmen. Eine direkte Einstellung von Wählern durch die Impulse der Nummernscheibe ist dann nicht mehr möglich, und man spricht von einem indirekt gesteuerten Verbindungsaufbau.

Bild I.10 zeigt gewisse Besonderheiten. So ist es z.B. nicht notwendig, daß die Rufe aller Teilnehmer im Konzentrationsabschnitt gleichviele KAN'en durchlaufen (vergl. die unterste Teilnehmergruppe und die oberen). Analog dazu müssen in der Expansionsphase nicht zu allen anrufbaren Teilnehmern hin gleich viel KAN'en durchlaufen werden; siehe z.B. die besonderen Dienste (Zeitsansage, Wettervorhersage, Auskunft usw.) in Bild I.10.

In Abschn. I.1 wurde festgestellt, daß Nebenstellenanlagen über Amtsleitungen mit dem Ortsnetz, Ortsnetze über Fernleitungen mit dem Fernnetz verbunden sind usw. Im allgemeinen Fall hat eine VSt also sowohl Leitungen zu übergeordneten Netzen, wie auch zu untergeordneten Netzen. In der allgemeinen Auffassung der VSt gemäß Bild I.4 könnte man diese Leitungen als gewöhnliche Teilnehmer betrachten. Sie haben lediglich u.U. eine besondere Nummer und rufen öfters an bzw. werden öfters angerufen. Wird in einer VSt aber die Verbindung schrittweise über mehrere KAN'en aufgebaut, dann erscheinen alle Teilnehmer zweifach: Einerseits als Rufende am Eingang der VSt und andererseits als Angerufene am Ausgang. Es wird dann von der gewählten Struktur der VSt abhängen, zu welchen KAN'en die von anderen Netzen gekommenen Rufe geleitet werden müssen, und von welchen KAN'en die zu anderen Netzen gehenden Rufe abgehen. Die entsprechenden Verbindungsbündel werden dann im allgemeinen erst nach der Konzentrationsstufe in die VSt geleitet bzw. zweigen schon vor den Leitungswahlstufen aus der VSt ab. In Bild I.10 sind als Beispiel die Bündel für ankommende und abgehende Fernrufe eingezeichnet.

KAN'en bilden also die Knotenpunkte des Verkehrs. Man kann die VSt damit als Graph mit gerichteten Kanten (Leitungsbündel und Richtung des Verbindungsaufbaues) und Knoten (KAN'en) auffassen. Dieser ist für das Beispiel von Bild I.10 in Bild I.11 dargestellt. Die Struktur einer VSt kann also durch einen solchen Graphen angegeben werden. Er hat

- entsprechend Konzentrations- und Expansionsabschnitt -
im allgemeinen die Form eines doppelten Fächers.

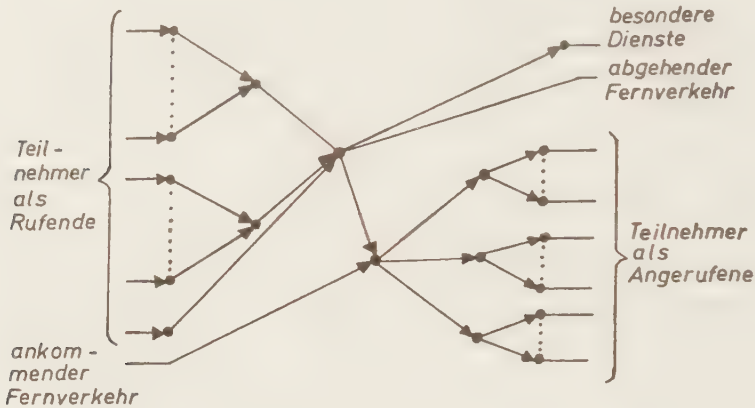


Bild I.11 Struktur der VSt von Bild I.10

I. 1.5 Spannweiten der Steuerung

Wie in Abschn. I.1.3 angedeutet, sind zwei Grundkonzeptionen für VSt'n üblich. Neben der bisher besprochenen - Aufbau der VSt aus KAN'en und schrittweiser Verbindungsaufbau - gibt es die Möglichkeit, ein koppelpunktesparendes Sprechwegesetz in Verbindung mit einer sehr leistungsfähigen Steuerung zu verwenden. Diese hat dann den Charakter einer Datenverarbeitungsanlage. Sie versucht alle Schaltmöglichkeiten im Sprechwegenetz optimal auszunützen. Um eine Verbindung zwischen zwei Teilnehmern herzustellen, untersucht sie alle Möglichkeiten, ob und wie mittels der momentan freien Schaltglieder die Verbindung hergestellt werden könnte ("Wegesuche"), wählt dann eine der Möglichkeiten aus und schaltet die Verbindung durch ("Durchschaltung"). Bei diesem Verfahren

spricht man von weitspannender oder zentralisierter Steuerung.

Derartige VSt'n seien hier nicht weiter betrachtet, da sich die vorliegende Arbeit nicht mit VSt'n mit weitspannender Steuerung befaßt. Es sei noch bemerkt, daß man solche VSt'n wegen der Komplexität der Steuerung - insbesondere in Deutschland - erst in neuester Zeit zu realisieren beginnt, während heute noch viele VSt'n nach der Methode des abschnittsweisen Verbindungsaufbaues arbeiten.

I. 1.6. Warte- und Verlustsysteme

An früherer Stelle wurde festgestellt, daß erfahrungsgemäß meist nur wenige Prozent der Teilnehmer gleichzeitig sprechen. Das wurde ausgenützt, um Koppelpunkte zu sparen. Die Anzahl gleichzeitig sprechender Teilnehmer ändert sich jedoch zufällig, und es kann durchaus vorkommen, daß für kurze Zeiten keiner oder fast kein Teilnehmer spricht. Genauso kommt es aber vor, daß zu gewissen Zeiten mehr Verbindungen gleichzeitig gewünscht werden als die VSt herstellen kann.

Es gibt prinzipiell zwei Möglichkeiten, wie sich die VSt in diesem Fall dem rufenden Teilnehmer gegenüber verhalten kann. Sie kann sich als Warte- oder Verlustsystem verhalten. Beim Verlustsystem wird dem rufenden Teilnehmer in irgendeiner Form, z.B. durch das Besetztzeichen mitgeteilt, daß die Verbindung nicht hergestellt werden kann. Der Teilnehmer muß, wenn er die Verbindung dennoch bekommen will, zu einem späteren Zeitpunkt einen erneuten Anrufversuch machen. Beim Wartesystem kann der Rufende "in der Leitung bleiben" und warten. Sobald es möglich ist, wird die Verbindung hergestellt. Es gibt auch Kombinationen beider Systemarten.

Meist sind Nebenstellenanlagen, Ortssysteme und Fernwahlsysteme als Verlustsysteme aufgebaut. Nach dem Prinzip des Wartesystems arbeiten nur wenige Systeme, z.B. Speicher-

vermittlungen der Fernschreibtechnik und gewisse Teil-einrichtungen für spezielle Aufgaben im Verbindungsaufbau. Die vorliegende Arbeit befaßt sich ausschließlich mit Verlustsystemen. Bei diesen gibt es zwei prinzipiell verschiedene Möglichkeiten, das Besetztzeichen zu erhalten. Die erste tritt ein, wenn die VSt die Verbindung zwar herstellen kann, der gerufene Teilnehmer aber gerade spricht ("Teilnehmerbelegtfall"). Die zweite Möglichkeit ist, daß die VSt momentan außerstande ist, die gewünschte Verbindung herzustellen, obwohl der gerufene Teilnehmer nicht spricht (Blockierung im Netz). Ein Beispiel einer solchen Blockierung ist: Der Weg der Verbindung durch die VSt führt über ein Leitungsbündel, in dem gerade alle Leitungen belegt sind.

I. 1.7 Erreichbarkeit und Stufenzahl von Koppelanordnungen

KAn'en bestehen aus dem Wegenetz und der Steuerung. Wegenetze von KAn'en sind funktionsmäßig aus Einheiten aufgebaut, die man Koppelvielfache nennt. Ein Koppelvielfach ist eine Anordnung von Koppelpunkten. Es hat eine Anzahl von Eingängen und Ausgängen und ist so aufgebaut, daß zur Herstellung der Verbindung zwischen einem Eingang und einem Ausgang nur ein Koppelpunkt betätigt werden muß. Es können - wenn benötigt - so viele Verbindungen gleichzeitig bestehen, wie Ausgänge vorhanden sind (es sei der Fall ausgeschlossen, daß die Zahl der Ausgänge größer als die der Eingänge ist). Koppelvielfache können z.B. aus Wählern oder Relaiskontakten aufgebaut sein. Funktionsmäßig kann man sich ein Koppelvielfach aus einer matrixähnlichen Anordnung von Koppelpunkten aufgebaut denken, die etwa der von Bild I.3 entspricht. Bild I.12 zeigt in dieser Darstellung ein Koppelvielfach mit $n_E=5$ Eingängen und $k=4$ Ausgängen. Die Koppelpunkte hat man sich in den Kreuzungspunkten der Schienen zu denken. Bild I.13 zeigt, wie man das Wegenetz einer KAn mit

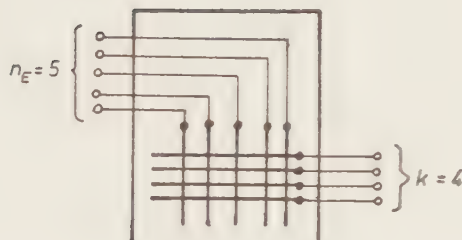


Bild I.12 Koppelvielfach mit 5 Eingängen und 4 Ausgängen.

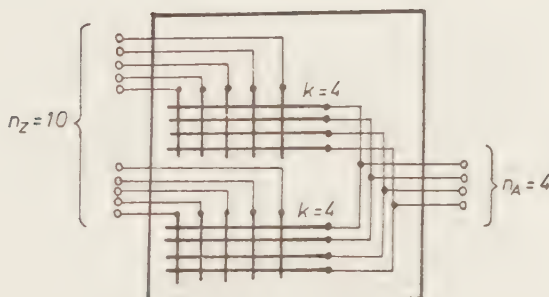


Bild I.13 KAN mit 10 Eingängen und 4 Ausgängen ($k = n_A$)

$n_Z = 10$ Zubringerleitungen und $n_A = 4$ Ausgängen aus zwei Koppelvielfachen aufbauen kann. Man nennt die Schaltung, die die Ausgänge der Koppelvielfache mit den Ausgängen der KAN verbindet, "Mischung". Der Aufwand an Koppelpunkten

in diesem Beispiel ist gleich $n_2 \cdot n_A$. Es wurden dabei Koppelvielfache verwendet, deren Zahl der Ausgangsleitungen k jeweils gleich n_A war. Man kann jedoch auch KAN'en aus Koppelvielfachen mit $k < n_A$ aufbauen. Es sind auch mit solchen KAN'en erfahrungsgemäß gut funktionierende VSt'n möglich. Bild I.14 zeigt ein Beispiel für den Fall $k < n_A$. Man spart Koppelpunkte, nimmt aber in Kauf, daß von einer Eingangsleitung der KAN nicht mehr zu allen n_A Ausgangsleitungen eine Verbindung möglich ist. Eine Eingangsleitung kann damit nicht mehr alle n_A Ausgangsleitungen erreichen, sondern nur noch k davon. Welche k Leitungen es sind, hängt vom Koppelvielfach ab, an dem die Eingangsleitung ankommt, genauer gesagt von der Mischung. Man nennt den Fall $k = n_A$ "vollkommene Erreichbarkeit" und den Fall $k < n_A$ "unvollkommene Erreichbarkeit".

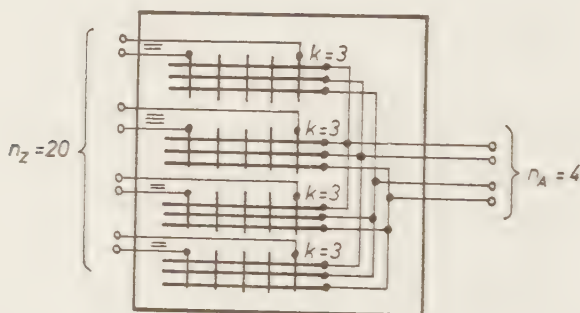


Bild I.14 KAN mit 20 Eingängen und 4 Ausgängen
(Fall $k = 3 < n_A$)

Die Konsequenz der unvollkommenen Erreichbarkeit ist das Auftreten zusätzlicher Besetztfälle. Kommt an einer KAN mit vollkommener Erreichbarkeit ein Ruf an und ist wenigstens

noch eine Ausgangsleitung frei, dann kann die KAN weiterverbinden. Bei einer KAN mit unvollkommener Erreichbarkeit kann aber u.U. nicht weiterverbunden werden, obwohl eine Ausgangsleitung frei ist. Ein Beispiel ist: In Bild I.14 sei die oberste der vier Ausgangsleitungen noch frei, die anderen drei seien belegt. Es komme ein Ruf an einer Eingangsleitung an, die zum untersten Koppelvielfach führt, dann kann die KAN nicht weiterverbinden. Wie stark die zusätzlichen Hemmungen (Besetztfälle) bei Verwendung von KAN'en mit unvollkommener statt mit vollkommener Erreichbarkeit sind, hängt von der Art der Mischung ab. Sie hängt außerdem noch von der Strategie ab, nach der die Steuerung der KAN bei der Belegung der Leitungen vorgeht, wenn für einen an der KAN angekommenen Ruf mehrere freie Leitungen, zu denen durchgeschaltet werden könnte, zur Verfügung stehen. Wenn nämlich etwas über die Wahrscheinlichkeit bekannt ist, mit der Rufe auf den einzelnen Eingängen der KAN ankommen, kann die Steuerung evtl. "vorausschauend" bei der Belegung der Leitungen taktieren. Stichworte sind "zufälliges Ab-suchen", "Absuchen von fester Nullstellung aus", usw. Die Konstruktion der Mischungen und Untersuchung der Suchstrategie nimmt in der Vermittlungstechnik und in der Fernsprechverkehrstheorie ein breites Feld ein. Hier sei jedoch nicht weiter darauf eingegangen.

Bisher wurde nur der Fall betrachtet, daß die betrachtete KAN ein einziges abgehendes Bündel hat. Hat die KAN mehrere abgehende Richtungen, dann kann man sich die Konstruktion aus Koppelvielfachen so vorstellen, daß die Ausgangsleitungen der Koppelvielfache gruppenweise den einzelnen Richtungen zugeordnet sind. Zu jeder Richtung gehört eine eigene Mischung. Bild I.15 zeigt ein Beispiel hierfür. Leitungszahlen und Erreichbarkeiten können für die einzelnen Richtungen durchaus unterschiedlich sein. Die Art und Weise, wie man bei

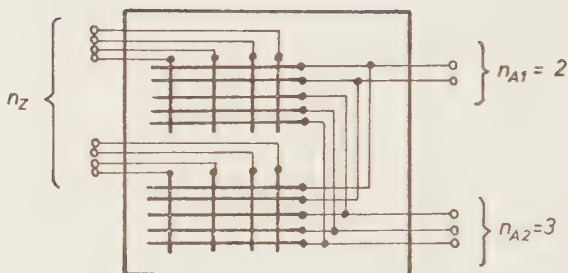


Bild I.15 KAN mit zwei abgehenden Richtungen und jeweils vollkommener Erreichbarkeit ($k_1 = n_{A1}$, $k_2 = n_{A2}$)

einer KAN mit mehreren Zubringerbündeln die Gesamtmenge der Eingänge ihrer Koppelvielfache auf die einzelnen Zubringerbündel aufteilt, ist prinzipiell frei und nicht davon abhängig, ob die KAN eine oder mehrere abgehende Richtungen hat.

Bei den bisher betrachteten KAN'en erfolgte die Durchschaltung von einem Eingang zu einem Ausgang jeweils über ein Koppelvielfach, oder anders gesagt nur über einen einzigen Koppelpunkt. Es gibt auch KAN'en, bei denen die Durchschaltung über zwei oder mehr Koppelvielfache hinweg vorgenommen wird. Man nennt die Zahl der Koppelpunkte, über die die Verbindung von einem Eingang der KAN zum Ausgang führt, die Stufenzahl. Bisher wurden also immer einstufige KAN'en betrachtet. Bild I.16 zeigt ein einfaches Beispiel einer zweistufigen KAN, bei der die Zahl der abgehenden Richtungen gleich 1 ist.

Auch bei mehrstufigen KAN'en ist die Erreichbarkeit ein wichtiges Merkmal. Je nach Konstruktion ist sie jedoch keine feste Zahl, sondern kann vom Muster belegter Eingangs-, Ausgangs- und Zwischenleitungen abhängen. Neben der Erreichbarkeit sind Stufenzahl, Aufbau aus Koppelvielfachen, ob und mit welcher Mischung die Ausgangsleitungen der KAN mit den zuletzt durchlaufenden Koppelvielfachen verbunden sind, die Anordnung der die Koppelvielfache verbindenden Zwischenleitungen, die Strategie der Steuerung usw. wichtige Merkmale. Mehrstufige KAN'en werden auch "Link-Systeme" genannt.

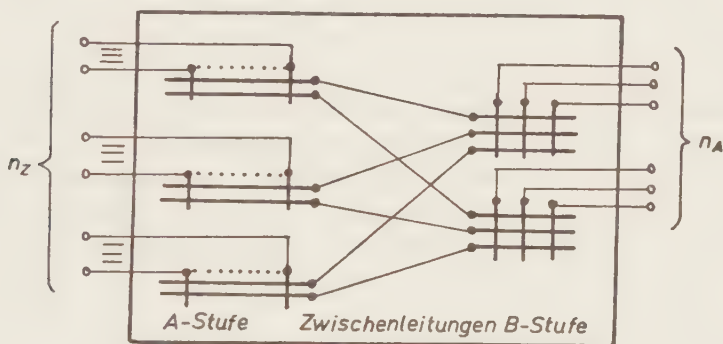


Bild I.16 Beispiel einer zweistufigen KAN

I. 1.8. Verlustrufe

Es sei eine VST gemäß Abschn. I.1.4 mit schrittweisem Verbindungsaufbau über mehrere KAN'en (einseitig gerichtetes Netz) betrachtet. Alle KAN'en sollen in jeder abgehenden Richtung vollkommene Erreichbarkeit haben. Dann ist dafür, ob eine bis zu einer bestimmten KAN durchgeschaltete Verbindung an dieser KAN weiterverbunden werden kann, nur maßgebend, ob im betreffenden Richtungs-bündel noch eine Leitung frei ist oder nicht. Ist eine Leitung frei, dann wird weiterverbunden, sonst kann nicht weiterverbunden werden. Handelt es sich um ein Verlustsystem, dann erhält

der rufende Teilnehmer das Besetztzeichen, und die durch einen Teil der VSt schon hergestellte Verbindung wird wieder aufgehoben. Es werden also alle durch diesen Ruf bis dahin belegten Leitungen und Schaltglieder wieder freigegeben und stehen für andere Verbindungswünsche zur Verfügung. In einem Wartesystem könnte dagegen auf die Möglichkeit des Weiterverbindens gewartet werden. Bei einer aus einzelnen KAN'en aufgebauten VSt läuft der Ruf eines Teilnehmers sozusagen vom Eingang der VSt in Richtung Ausgang zum Gerufenen. Der Weg führt über bestimmte Knotenpunkte (KAN'en) entlang den Verbindungsbündeln zum gerufenen Teilnehmer. An jedem Knotenpunkt wird entschieden, ob der Ruf um einen Abschnitt weiterschreiten kann. Während des Fortschreitens durch die VSt zieht er sozusagen einen Faden hinter sich her, der alle Schaltglieder und Leitungen belegt, über die der Ruf gelaufen ist. Ist der Ruf schließlich beim Gerufenen angekommen, dann ist der Verbindungsweg hergestellt. Dieser Weg verläuft entlang des gedachten Fadens durch die VSt und besteht so lange, bis das Gespräch beendet wird. Kann der Ruf aber während des Verbindungsaufbaues an irgendeiner KAN nicht weiterverbunden werden, dann wird im Verlustsystem der so weit aufgebaute Verbindungsweg wieder abgebrochen. Es liegt ein Verlustruf vor.

Ein Verlustruf liegt auch dann vor, wenn der Ruf die ganze VSt durchlaufen konnte, aber den gerufenen Teilnehmer besetzt vorfindet. Dies entscheidet sich an der Leitungswahlstufe. Kommen in der VSt auch KAN'en mit unvollkommener Erreichbarkeit vor, dann gilt für den Verbindungsaufbau ebenfalls das bisher Gesagte. Es besteht lediglich eine weitere Möglichkeit, wie Verlustrufe entstehen können: Der Ruf ist an einer KAN angelangt und im gewünschten Richtungs-bündel sind noch Leitungen frei, die KAN ist aber momentan in einem Belegungszustand, in dem sie wegen der unvollkommenen Erreichbarkeit den angekommenen Ruf zu keiner der freien Leitungen weiterverbinden kann.

Diese Bemerkungen über die Vermittlungstechnik mögen genügen. Es sei auf die ausführliche Literatur über dieses Gebiet (siehe Hinweise am Anfang von Teil I.) hingewiesen.

I. 2 Mathematische Modelle

Trifft in einer VSt ein Signal eines Teilnehmers ein, dann löst dieses eine Folge genau vorgeschriebener Vorgänge in der VSt aus, z. B. ein Ruf den Aufbau einer neuen Verbindung. Damit ändert sich der Zustand der VSt. Der Zustand der VSt ist beschrieben durch Angaben über Leitungsbelegungen der Bündel, Schaltzustände von Koppelpunkten usw. Für jeden Zustand gibt es eine Reihe möglicher Folgezustände. In welchen Zustand die VSt von einem jetzigen Zustand aus übergeht, hängt vom nächsten eintreffenden Signal ab.

Die VSt reagiert also deterministisch auf von außen kommende Signale. Wann und in welcher Folge Signale eintreffen, kann man nur in Form von statistischen Aussagen beschreiben. Also ändert die VSt ihren Zustand in zufälligen Zeitpunkten. Findet eine Zustandsänderung statt, dann hängt es vom eintreffenden Signal und damit vom Zufall ab, zu welchen der möglichen Nachfolgezuständen der Übergang erfolgt. Der zeitliche Verlauf des Verkehrsgeschehens in der VSt ist die zeitliche Folge der Zustände, die die VSt einnimmt.

Die mathematische Beschreibung des Verkehrsgeschehens geschieht anhand vereinfachender Modellvorstellungen. Die wichtigste Annahme über die VSt ist, daß alle Wahl- und Schaltvorgänge und der Verbindungsaufbau zeitlos erfolgen. Das impliziert Annahmen über alle diesbezüglichen Tätigkeiten der Teilnehmer, z.B., daß das Wählen der Nummer zeitlos und sofort nach Abheben des Hörers geschieht, daß die Zeitdauer vom Beginn des Klingelzeichens bei Angerufenen bis zum Abheben des Hörers gleich Null ist u.ä. Im Sprechwegenetz der VSt betrachtet man - wie schon im Abschnitt I.1 - alle Leitungen als einadrig. Für verkehrstheoretische Betrachtungen belanglose Einrichtungen wie z.B. die Einrichtung zur Gebührenerfassung läßt man außer Betracht.

Die Funktionsweise von KAN'en beschreibt man so global wie möglich. So genügt z.B. für KAN'en, die vollkommene Erreichbarkeit in allen Richtungen haben, die Angabe der Leitungszahlen der Zubringer- und Abnehmerbündel. Über die Steuerung braucht bei vollkommener Erreichbarkeit im allgemeinen nichts gesagt zu werden, da nur dann ein Ruf abgewiesen wird, wenn im gewünschten Richtungs-bündel keine Leitung mehr frei ist. Die Stufenzahl spielt bei vollkommener Erreichbarkeit in diesem Zusammenhang im allgemeinen keine Rolle.

Bei KAN'en mit unvollkommener Erreichbarkeit ist die Stufenzahl jedoch von Bedeutung. Einstufige KAN'en sind meist leichter zu beschreiben als mehrstufige. Bei einstufigen KAN'en ist es wesentlich, wie die Mischung aussieht und in welcher Weise nach freien Leitungen gesucht wird (Absuchen aus der momentanen Nullstellung, Suchen von fester Nullstellung aus usw.). Bei mehrstufigen KAN'en ist eine Reihe weiterer Angaben nötig.

Wie weit es möglich ist, vereinfachende Angaben zu machen, hängt vom Einzelfall ab. Hier sei nur ein Beispiel angegeben: Bei einstufigen KAN'en mit unvollkommener Erreichbarkeit verwendet man in der Fernsprechverkehrstheorie oft die sogenannten Durchlaßwahrscheinlichkeiten. Dies sind bedingte Wahrscheinlichkeiten. Sie seien mit $\mu_j(x_j)$ bezeichnet. $\mu_j(x_j)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein an der KAN angekommener Ruf, der in deren abgehenden Richtung j zielt, durchgeschaltet werden kann, wenn im j -ten Richtungs-bündel x_j Leitungen belegt sind. Die Werte von $\mu_j(x_j)$ hängen zwar im wesentlichen von der Art der verwendeten Mischungen ab, aber u.a. auch von den statistischen Eigenschaften des Verkehrs, der an der KAN ankommt. Eine vereinfachende Beschreibung einer KAN mit unvollkommener Erreichbarkeit und der Stufenzahl 1 kann nun so aussehen, daß man die Durchlaßwahrscheinlichkeiten für einen als

repräsentativ erachteten Verkehr ermittelt und dann annimmt, daß sie für Verkehre mit ähnlichen statistischen Eigenschaften auch gelten (siehe z.B. [11], [24], [26], [27]).

An den Eingängen von VSt'n erscheinen die Teilnehmer in ihrer Eigenschaft als Rufende (siehe z.B. die Bilder I.8, I.10). Man spricht deshalb von Verkehrsquellen (kurz Quellen), die "Rufe erzeugen". Für die Ruferzeugung durch Quellengruppen (Teilnehmergruppen) sind in der Fernsprechkverkehrstheorie die beiden folgenden Modelle besonders gebräuchlich.

Das erste Modell ist der "Zufallsverkehr 1. Art" (kurz ZV1), auch "unendliche Quellenzahl" genannt. In diesem Modell wird angenommen, daß die Zeitlücken zwischen zwei Rufen aus einer betrachteten Quellengruppe voneinander unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable sind. Als Verteilungsfunktion wird eine negativ exponentielle Verteilung mit dem Mittelwert $1/\Lambda_0$ angenommen. Damit bildet (siehe z.B. [23], [27]) die zeitliche Folge der Rufe einen Poisson-Prozeß und die Wahrscheinlichkeit, daß im Zeitintervall $t \dots t + \Delta t$ (t = beliebiger Zeitpunkt) ein Ruf erzeugt wird ist $\Lambda_0 \cdot \Delta t + o(\Delta t)$. Man nennt Λ_0 die mittlere Anrufrate.

Das zweite Modell ist der "Zufallsverkehr 2. Art" (kurz ZV2), auch "endliche Quellenzahl" genannt. Es wird wieder angenommen, daß die Zeitlücken zwischen zwei Anrufen aus der betrachteten Quellengruppe unabhängig sind. Als Verteilungsfunktionen werden negativ exponentielle Verteilungsfunktionen mit dem Mittelwert $1/\Lambda$ angesetzt. Für Λ wird hier aber angenommen, daß es der momentanen Anzahl freier Quellen proportional ist. Die Proportionalitätskonstante sei α . $\Lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ ist auch hier die Wahrscheinlichkeit, daß im Zeitintervall $t \dots t + \Delta t$ ein Ruf erzeugt wird, also

(siehe z.B. [23]) die mittlere Anrufrate. Sie ändert sich immer dann, wenn eine weitere Quelle belegt wird oder eine belegte Quelle frei wird. Wenn z_q die Zahl der Quellen einer Quellengruppe und x die Zahl belegter Quellen ist, dann ist $z_q - x$ die Zahl freier Quellen, also $\Lambda(x) = \alpha \cdot (z_q - x)$.

Rufwiederholungen nach nicht erfolgreichen Rufen werden in diesen Modellen nicht berücksichtigt. Weiterhin wird als Zahl belegter Quellen in einer als Quellengruppe betrachteten Teilnehmergruppe die Zahl derjenigen sprechenden Teilnehmer genommen, die aufgrund selbst ausgesendeter Rufe sprechen. Daß daneben u.U. einige Teilnehmer der Gruppe sprechen, weil sie von anderen Teilnehmern angerufen wurden und deswegen keine Rufe aussenden können, wird vernachlässigt. Sie zählen als nicht belegte Quellen.

Die Dauern von Gesprächen, also die Zeitdauern des Bestehens von Verbindungen, werden meist als negativ exponentiell verteilte Zufallsvariable angenommen. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Verbindung im Zeitintervall $t \dots t + \Delta t$ endet gleich $\epsilon \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, wenn $1/\epsilon$ die mittlere Gesprächsdauer ist. ϵ ist dann die mittlere Enderate. Für die Gesprächsdauern wird angenommen, daß sie gegenseitig und von etwaigen früheren Gesprächen usw. unabhängig sind.

Da man sich im allgemeinen bei verkehrstheoretischen Untersuchungen für die Verhältnisse während der stärksten Verkehrsbelastung interessiert, wählt man für die Parameter Λ_0 , α , ϵ usw. die Werte der Hauptverkehrsstunde. Im Modell nimmt man an, daß sie zeitlich konstant sind entgegen der Wirklichkeit, wo die Verkehrsintensität mit der Tageszeit schwankt, durch Jahreszeit, Wochentag usw. beeinflusst wird und u.U. die tageszeitlichen Verkehrsmaxima in verschiedenen Teilen der VSt nicht koinzident sind.

I. 3 Das Verkehrsgeschehen als stochastischer Prozeß

Der Zustand der VSt ist beschrieben durch Angaben über Leitungsbelegungen der Bündel, Schaltzustände von Koppelpunkten, Frei - Belegt - Angaben über Teilnehmer usw. Die VSt ändert ihren Zustand in zufälligen Zeitpunkten, und es hängt vom Zufall ab, in welchen der möglichen Folgezustände ein momentaner Zustand übergeht. Das Verkehrsgeschehen ist die zeitliche Folge der Zustände, die die VSt einnimmt.

Es seien nun die in Abschnitt I.2 geschilderten Modellvorstellungen zugrunde gelegt und der Zustand der VSt durch einen Vektor $\mathcal{X}=(X_1, X_2, \dots, X_a)$ beschrieben. Dessen Komponenten X_i sollen etwa folgende Bedeutungen haben: Zahl belegter Teilnehmer, Zahl belegter Koppelpunkte eines Koppelvielfaches, Zahl belegter Leitungen in einem Leitungsbündel usw. Sie sind also nichtnegative, ganze Zahlen. $\mathcal{X}$ ist die Abbildung des Raumes der technischen Zustände der VSt auf einen a -dimensionalen Raum, genauer auf ein a -dimensionales Gitter. Dieser Vektor $\mathcal{X}$ ist dann in Abhängigkeit von der Zeit t eine Zufallsfunktion, also ein (a -dimensionaler) stochastischer Prozeß. In unserem Fall ist $\mathcal{X}(t)$ ein stochastischer Prozeß mit diskreten Zuständen (Gitterpunkte) und kontinuierlichem Parameter (Zeit).

Es sei Ω die (endliche) Menge aller Zustände, deren $\mathcal{X}$ fähig ist, und ω^i, ω^j seien Elemente von Ω , also Gitterpunkte. t^i und t^j seien Punkte auf der Zeitachse. $\mathcal{X}(t)$ hat aufgrund der in Abschnitt I.2 gewählten Modellvorstellungen die Markov'sche Eigenschaft. Das bedeutet kurz gesagt folgendes: Die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Prozeß zur Zeit t^j im Zustand ω^j ist, unter der Bedingung, daß er zur Zeit t^i (es sei $t^i \leq t^j$) im Zustand ω^i war, hängt nicht davon ab, in welchen Zuständen er in den Zeitpunkten $t < t^i$ war. Aufgrund der gewählten Modellvorstellungen

ist der Prozeß außerdem zeithomogen. Das bedeutet, daß die genannte bedingte Wahrscheinlichkeit nicht den absoluten Werten von t' und t'' abhängt, sondern nur von der Differenz $h = t'' - t'$. Diese Wahrscheinlichkeit sei mit $P(\omega'; \omega'', h)$ bezeichnet. Sie lautet

$$P(\omega'; \omega'', h) = W(\mathcal{X}(t+h) = \omega' / \mathcal{X}(t) = \omega''), \quad h > 0 \quad (I.3.1)$$

und heißt Übergangswahrscheinlichkeit. ($W(A/B)$ bedeutet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Bedingung B .) Für $P(\omega'; \omega'', h)$ gilt:

$$P(\omega'; \omega'', h) \geq 0, \quad (I.3.2)$$

$$\sum_{\omega' \in \Omega} P(\omega'; \omega'', h) = 1. \quad (I.3.3)$$

$P(\omega'; \omega'', h)$ erfüllt die Chapman-Kolmogorov-Gleichung für Markov-Prozesse, die hier lautet:

$$P(\omega'; \omega'', h+u) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega'; \omega, h) \cdot P(\omega; \omega'', u), \quad 0 < u < h+u. \quad (I.3.4)$$

Zusätzlich legt man üblicherweise fest, daß

$$\left. \begin{aligned} P(\omega'; \omega'', 0) &= 1 \quad \text{für } \omega' = \omega'', \\ &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned} \right\} \quad (I.3.5)$$

ist. Man hat damit den Definitionsbereich der Wahrscheinlichkeit $P(\omega'; \omega'', h)$ von $h > 0$ auf $h \geq 0$ erweitert.

Unter den Bedingungen (I.3.2) bis (I.3.5) existieren dann (siehe z.B. [28]) folgende Limites:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(\omega^i; \omega^k, h)}{h} = q_{\omega^i, \omega^k}, \quad \omega^i \neq \omega^k \quad (\text{I.3.6a})$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - P(\omega^i; \omega^i, h)}{h} = q_{\omega^i}, \quad (\text{I.3.6b})$$

die beide von der Zeit unabhängig sind (zeithomogener Prozeß!) und für die gilt (Ω ist als endlich vorausgesetzt!):

$$q_{\omega^i} = \sum_{\substack{(\omega^k) \in \Omega \\ \omega^k \neq \omega^i}} q_{\omega^i, \omega^k}. \quad (\text{I.3.7})$$

Die Summe ist über alle möglichen Paare (ω^i, ω^k) zu nehmen, mit Ausnahme des Paares (ω^i, ω^i) . Die q -Werte können wie folgt gedeutet werden: Es ist

$$P(\omega^i; \omega^k, \Delta h) = q_{\omega^i, \omega^k} \cdot \Delta h + o(\Delta h), \quad \omega^i \neq \omega^k \quad (\text{I.3.8a})$$

und

$$1 - P(\omega^i; \omega^i, \Delta h) = q_{\omega^i} \cdot \Delta h + o(\Delta h). \quad (\text{I.3.8b})$$

Also sind die Wahrscheinlichkeiten für die Übergänge innerhalb des Zeitintervalls $t \dots t + \Delta h$ für kleine Δh asymptotisch proportional der Länge des Intervalles Δh .

Aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung kann man durch Limes-Bildung (siehe z.B. [28]) folgende Differentialgleichungen für die Übergangswahrscheinlichkeiten gewinnen:

$$\frac{dP(\omega^1; \omega^1, h)}{dh} = -P(\omega^1; \omega^1, h) \cdot q_{\omega^1} + \sum_{\omega \neq \omega^1} P(\omega^1; \omega, h) \cdot q_{\omega, \omega^1} \quad (I.3.9)$$

und

$$\frac{dP(\omega^1; \omega^1, h)}{dh} = -P(\omega^1; \omega^1, h) \cdot q_{\omega^1} + \sum_{\omega \neq \omega^1} P(\omega^1; \omega, h) \cdot q_{\omega, \omega^1} \quad (I.3.10)$$

Gl.(I.3.9) wird System der Vorwärts-Differentialgleichungen genannt und Gl.(I.3.10) System der Rückwärts-Differentialgleichungen. Die Anfangsbedingungen sind gemäß Gl.(I.3.5):

$$\left. \begin{aligned} P(\omega^1; \omega^1, 0) &= 1 \quad \text{für } \omega^1 = \omega^1, \\ &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned} \right\} \quad (I.3.11)$$

Die q -Werte sind im allgemeinen aus den vorgegebenen Eigenschaften eines Wählnetzes (siehe die Gl.'en (I.3.8a,b)) leicht zu bestimmen. Ω ist eine endliche Menge. Beide Differentialgleichungssysteme haben eine eindeutige, gemeinsame Lösung $P(\omega^1; \omega^1, t)$, siehe z.B. [28].

Die absolute Wahrscheinlichkeit, den Prozeß zum Zeitpunkt t im Zustand ω vorzufinden (Zustandswahrscheinlichkeit), sei mit $P(\omega, t)$ bezeichnet. Sie kann bestimmt werden, wenn die Anfangsverteilung $P(\omega^1, 0)$ bekannt ist:

$$P(\omega, t) = \sum_{\omega^1 \in \Omega} P(\omega^1, 0) \cdot P(\omega^1; \omega, t) \quad (I.3.12a)$$

In den meisten verkehrstheoretischen Anwendungen interessiert

die Zustandswahrscheinlichkeit im Fall $t \rightarrow \infty$, also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\omega, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\omega' \in \Omega} P(\omega', 0) \cdot P(\omega'; \omega, t) \quad . \quad (\text{I.3.12b})$$

Um diesen Grenzwert zu berechnen, hat man folgendes zu beachten: Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten mathematischen Modelle führen zu irreduziblen Markov-Prozessen, deren endlich viele Zustände eine einzige ergodische Klasse bilden, und es existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\omega'; \omega, t) = P(\omega) \quad , \quad (\text{I.3.13})$$

wobei gilt

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1 \quad . \quad (\text{I.3.14})$$

$P(\omega)$ ist die "ergodische" Zustandswahrscheinlichkeit.

Gl.(I.3.13) in Gl.(I.3.12b) eingesetzt ergibt wegen

$$\sum_{\omega' \in \Omega} P(\omega', 0) = 1 \quad :$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\omega, t) = P(\omega) \quad . \quad (\text{I.3.15})$$

Man nennt in der Verkehrstheorie (was eigentlich nicht ganz korrekt ist) diese Verteilung $P(\omega)$ meist "stationäre Verteilung" und meint $P(\omega)$, wenn man von "Zustandswahrscheinlichkeit" spricht.

Eine Aussage über $P(\omega)$ erhält man mittels der Gl.'en (I.3.12a,b) und (I.3.13) aus dem Vorwärts-Differentialgleichungssystem (I.3.9). (Aus dem Rückwärts-Differential-

gleichungssystem würde man keine Aussage über $P(\omega)$ erhalten.) Die Aussage lautet:

$$0 = \sum_{\omega' \neq \omega} [P(\omega') \cdot q_{\omega'\omega}] - P(\omega) \cdot q_{\omega\omega}, \quad (\forall \omega \in \Omega). \quad (I.3.16)$$

Dies ist ein homogenes System linearer Gleichungen für die Größen $P(\omega)$. Es hat eine verschwindende Determinante, so daß die normalisierende Bedingung (I.3.14) hinzugenommen werden muß.

Das Gleichungssystem (I.3.16) zusammen mit Gl.(I.3.14) wird in der Fernsprechkverkehrstheorie "System der Zustandsgleichungen" genannt und spielt dort eine zentrale Rolle.

Weitere in der Verkehrstheorie interessierende Größen sind - neben den Zustandswahrscheinlichkeiten - Zeitlückenverteilungen im Fall $t \rightarrow \infty$, z.B. Wartezeitverteilungen in Wartesystemen. Aussagen hierüber können aus dem Rückwärts-Differentialgleichungssystem gewonnen werden, im allgemeinen jedoch nicht aus dem Vorwärts-Differentialgleichungssystem. Darauf soll jedoch nicht weiter eingegangen werden, da die vorliegende Arbeit sich mit Verlustsystemen befaßt, und zur Bestimmung der bei Verlustsystemen interessierenden Verkehrsgrößen die Kenntnis der Zustandswahrscheinlichkeiten ausreicht.

Eine in der Fernsprechkverkehrstheorie oft vorkommende Art von Markov-Prozessen mit diskretem Zustandsraum und kontinuierlichem Parameter ist der Geburts- und Todes-Prozeß. Er ist von der Forderung bestimmt, daß während infinitesimal kurzer Zeitintervalle $t \dots t+dt$ Übergänge aus einem gegebenen Zustand nur in die benachbarten Zustände möglich sind. Das bedeutet für die in Gl.(I.3.6a) definierten q -Werte:

$$q_{\omega, \omega^*} = 0 \quad \text{falls } \omega, \omega^* \text{ nicht benachbart.} \quad (I.3.17)$$

Wenn zwei Punkte benachbart sind, ergibt sich aus folgendem:

$\mathcal{X}=(x_1, x_2, \dots, x_a)$ ist ein a -dimensionaler Vektor. Jeder

Zustand ω ist ein Punkt im a -dimensionalen Gitter:

$\omega=(x_1, x_2, \dots, x_a)$. ω_i^+ ist der zu ω bezüglich der i -ten Komponente "nach oben benachbarte" Punkt:

$$\omega_i^+ = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_a) \quad . \quad (I.3.18a)$$

(Die Existenz dieses Punktes in der Menge Ω sei vorausgesetzt.)

ω_i^- ist der zu ω bezüglich der i -ten Komponente "nach unten benachbarte" Punkt:

$$\omega_i^- = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - 1, x_{i+1}, \dots, x_a) \quad . \quad (I.3.18b)$$

(Die Existenz dieses Punktes in der Menge Ω sei vorausgesetzt.)

Es seien einige neue Bezeichnungen eingeführt:

$$q_{\omega, \omega_i^+} = \vartheta_i(\omega), \quad i=1, 2, \dots, a \quad , \quad (I.3.19a)$$

$$q_{\omega, \omega_i^-} = \theta_i(\omega), \quad i=1, 2, \dots, a \quad . \quad (I.3.19b)$$

Man nennt $\vartheta_i(\omega)$ den "Geburtskoeffizienten" und $\theta_i(\omega)$ den "Sterbekoeffizienten" der i -ten Komponente. $\vartheta_i(\omega) \cdot dt$ ist (vergl. Gl.(I.3.8a)) die Wahrscheinlichkeit, daß der Prozeß während der infinitesimalen Zeitdauer dt vom momentanen Zustand ω in den Zustand ω_i^+ übergeht und $\theta_i(\omega) \cdot dt$ diejenige, daß er von ω nach ω_i^- übergeht.

Gemäß Gl.(I.3.7) kann man q_{ω} durch die $\phi_i(\omega)$ und die $\theta_i(\omega)$ ausdrücken. Damit lautet das System der Zustandsgleichungen (I.3.16) für den Geburts- und Todes-Prozeß:

$$0 = \sum_{i=1}^n [\phi_i(\omega_i^*) \cdot P(\omega_i^*) - (\theta_i(\omega) + \phi_i(\omega)) \cdot P(\omega) + \theta_i(\omega_i^*) \cdot P(\omega_i^*)], \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (I.3.20)$$

Es sei $F(\omega)$ eine Lösung des homogenen Gleichungssystems (I.3.20). Dann ist $F(\omega) \cdot c$ - wobei c ein beliebiger Faktor ist - ebenfalls Lösung von Gl.(I.3.20). $F(\omega)$ kann man als nicht normierte Lösung des Systems der Zustandsgleichungen auffassen. Den Wert des Faktors c bestimmt Gl.(I.3.14). Es ist:

$$\sum_{\omega \in \Omega} F(\omega) \cdot c = 1, \quad ,$$

also ist
$$c = \frac{1}{\sum_{\omega \in \Omega} F(\omega)} . \quad (I.3.21)$$

Damit hat $P(\omega)$ die Form

$$P(\omega) = \frac{F(\omega)}{\sum_{\tau \in \Omega} F(\tau)} . \quad (I.3.22)$$

Die Lösung $P(\omega)$ ist für die in der Fernsprechkverkehrstheorie üblichen mathematischen Modelle eindeutig (siehe z.B. [2], [27], [28]).

I. 4 Verkehrsgrößen und ihre Bestimmung

Verkehrsgrößen sind Erwartungswerte bestimmter Zufallsvariablen der VSt und Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Ereignisse. Sie dienen zur Beurteilung der Verkehrsverhältnisse in der VSt und damit auch zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit der VSt. Beispiele für derartige Erwartungswerte sind: $\bar{Y}$ = mittlere Anzahl belegter Leitungen eines Bündels ("Belastung" dieses Bündels); $\bar{c}_A$ = mittlere Anzahl der pro Zeiteinheit auf einem Zubringerbündel einer KAN ankommenden Rufe ("mittlere Anrufrate"); $\bar{c}_V$ = mittlere Anzahl der pro Zeiteinheit an einer betrachteten Stelle in der VSt (z.B. einer KAN) abgewiesenen Rufe ("mittlere Verlustrufrate"). Beispiele für die oben erwähnten Wahrscheinlichkeiten sind: B = Bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß an einer betrachteten Stelle der VSt (z.B. einer KAN) ein Ruf abgewiesen wird unter der Bedingung, daß dort ein Ruf ankommt; w_w = Wahrscheinlichkeit in Wartesystemen, daß ein Ruf nicht sofort durchgeschaltet werden kann, also warten muß, bis die Verbindung hergestellt werden kann. Schließlich sind für bestimmte Systeme u.U. Zeitlückenverteilungen von großer Wichtigkeit und zählen dann auch zu den Verkehrsgrößen. Ein Beispiel sind die Wartedauernverteilungen in Wartesystemen.

Bei allen Verkehrsgrößen interessiert man sich üblicherweise für ihren Grenzwert im Falle $t \rightarrow \infty$. In dieser Arbeit werden ausschließlich Verlustsysteme betrachtet. Die Berechnung der Verkehrsgrößen von Verlustsystemen, z.B.

$\bar{Y}, \bar{c}_A, \bar{c}_V, B$ setzt die Kenntnis der Zustandswahrscheinlichkeiten voraus, also die Kenntnis der (ergodischen) Wahrscheinlichkeiten $P(\omega)$. Man bekommt $P(\omega)$ durch Lösung des Gleichungssystems (I.3.16) + (I.3.14), bei dem im Rahmen dieser Arbeit die Gl.(I.3.16) immer die spezielle Form gemäß Gl.(I.3.20) hat. Wenn $P(\omega)$ bestimmt ist, sind die Verkehrsgrößen im allgemeinen prinzipiell leicht zu berechnen.

Das sei an zwei Beispielen gezeigt. Das erste ist die Belastung Y . Es sei $l(\omega)$ die Anzahl belegter Leitungen im betrachteten Leitungsband, wenn die VSt im Zustand ω ist. Die Abhängigkeit der Größe $l(\omega)$ von ω ist meist sehr einfach zu bestimmen. Für Y , den Erwartungswert von $l(\omega)$ gilt dann

$$Y = \sum_{\omega \in \Omega} l(\omega) \cdot P(\omega) \quad . \quad (I.4.1)$$

Das zweite Beispiel sei der Verlust B . Es sei $g(\omega)$ die mittlere Zahl von Rufen, die in der Zeiteinheit an der betrachteten KAn ankommen. Dann ist $g(\omega) \cdot dt$ die Wahrscheinlichkeit, daß im Intervall dt ein Ruf an der betrachteten KAn ankommt, wenn die VSt im Zustand ω ist. Analog sei $v(\omega) \cdot dt$ die Wahrscheinlichkeit, daß im Intervall dt ein Ruf an der betrachteten KAn ankommt und nicht weiterverbunden werden kann. $g(\omega)$ und $v(\omega)$ sind für ein vorgegebenes mathematisches Modell im allgemeinen unschwer zu bestimmen. B ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf während dt ankommt und nicht weiterverbunden werden kann, dividiert durch die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf während dt an der KAn ankommt, also:

$$B = \frac{\sum_{\omega \in \Omega} v(\omega) \cdot dt \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega} g(\omega) \cdot dt \cdot P(\omega)} \quad .$$

Der Faktor dt läßt sich aus Zähler und Nenner kürzen. Damit kann man den Zähler als die mittlere Zahl von solchen Rufen pro Zeiteinheit deuten, die an der KAn ankommen und nicht verbunden werden. Er ist also die Größe c_v :

$$c_v = \sum_{\omega \in \Omega} v(\omega) \cdot P(\omega) \quad . \quad (I.4.2)$$

Der Nenner ist die mittlere Zahl der pro Zeiteinheit an der KAn ankommenden Rufe. Er ist also die Größe c_A :

$$c_A = \sum_{\omega \in \Omega} g(\omega) \cdot P(\omega) \quad . \quad (I.4.3)$$

B läßt sich damit als Quotient von c_v und c_A anschreiben:

$$B = \frac{c_v}{c_A} \quad . \quad (I.4.4)$$

Die Schwierigkeit bei der Bestimmung von Verkehrsgrößen ist, die Lösung $P(\omega)$ der Zustandsgleichungen zu finden. $P(\omega)$ in Form eines geschlossenen Ausdrucks zu ermitteln, gelingt nur sehr selten. Wenn dies nicht der Fall ist, kann man versuchen, die Zustandsgleichungen in speziellen Fällen numerisch zu lösen. Dies gelingt jedoch wegen der großen Zahl der Unbekannten nur für sehr kleine Systeme. Man muß sich deshalb in den meisten Fällen darauf beschränken, Werte von Verkehrsgrößen durch Näherungsbetrachtungen mehr oder weniger genau zu ermitteln. Ein sehr großes Problem ist hierbei die zuverlässige Abschätzung der Fehler.

Schließlich sei noch das Verfahren der Simulation von zu betrachtenden mathematischen Modellen von VSt'n auf elektronischen Rechenanlagen erwähnt. Dieses Verfahren gehört zu den Monte-Carlo-Methoden und wird in der Fernsprech-

verkehrstheorie seit langem verwendet (siehe z.B. [4], [7], [8], [16], [18], [22], [26]). Bei der Simulation wird die Rechenanlage dazu benutzt, das Verkehrsgeschehen des mathematischen Modells unter Verwendung von Pseudozufallszahlen nachzuvollziehen. Durch statistische Auswertung geeigneter Stichproben, die man diesem Ablauf entnimmt, bekommt man numerische Werte für die gesuchten Verkehrsgrößen. Sie sind mit Vertrauensintervallen behaftet und gelten mit einer gewissen Aussagesicherheit. Es sind zwei Varianten der Simulation gebräuchlich. Die erste ist die sogenannte "Ruf- und Löschzahlenmethode". Sie nützt folgende Tatsache aus: Zu dem durch das mathematische Modell definierten Markov-Prozeß mit diskretem Zustandsraum und kontinuierlichem Parameter gibt es (siehe [4]) immer einen analogen Markov-Prozeß, der zwar denselben Zustandsraum, aber diskreten Parameter hat. Er hat dieselben ergodischen Zustandswahrscheinlichkeiten. Damit kommt man auch bei diesem Prozeß zu denselben Werten solcher Verkehrsgrößen, die durch Zustandswahrscheinlichkeiten definiert sind. Ein Programm zur Simulation dieses zweiten Prozesses auf einer Rechenanlage ist einfacher zu erstellen als für den ursprünglichen Prozeß. Die Ruf- und Löschzahlenmethode ist jedoch zur Bestimmung von Zeitlückenverteilungen, also z.B. von Wartedauerverteilungen eines Wartesystems ungeeignet. Sind solche Verteilungen zu bestimmen, dann ist ein Programm zur Simulation des ursprünglichen, durch das mathematische Modell definierten Prozesses zu erstellen. Diese Variante der Simulation wird "zeittreue Simulation" genannt. Die zeittreue Simulation hat eine schlechtere Zeiträufung gegenüber dem realen Zeitablauf als die Simulation mittels Ruf- und Löschzahlen.

Hiermit sei die Zusammenstellung von Grundlagen, die insbesondere für den in das hier betrachtete Sondergebiet Fernsprechverkehrstheorie nicht speziell eingearbeiteten Leser gedacht ist, beendet.

II. BERECHNUNG DER ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN UND VERKEHRSGRÖßEN VON VERMITTLUNGSSTELLEN MIT FÄCHERSTRUKTUR

Im Teil II der vorliegenden Arbeit wird ein mathematisches Modell für das aus den Teilnehmern und einer Vermittlungsstelle bestehende System entwickelt. Für die VSt wird angenommen, daß sie als Verlustsystem arbeitet. Weiter wird vorausgesetzt, daß sie aus einzelnen KAN'en aufgebaut ist und der Verbindungsaufbau abschnittsweise von KAN zu KAN erfolgt. Es liegt also keine weitspannende Steuerung im Sinne von Abschn. I.1.5 vor. Das Verkehrsgeschehen wird durch einen multidimensionalen stochastischen Prozeß beschrieben. Die Zustandsgleichungen für diesen Prozeß werden aufgestellt und ihre Lösung in Form eines expliziten Ausdrucks gefunden. Die Zustandswahrscheinlichkeiten sind damit bekannt, und es ist in einfacher Weise möglich, alle bei Verlustsystemen interessierenden Verkehrsgrößen zu bestimmen.

Die Bedeutung verwendeter Abkürzungen und Formelzeichen ist im Anhang der Arbeit zusammengefaßt.

II. 1 Das betrachtete System

II. 1.1 Beschreibung der betrachteten Klasse von Vermittlungsstellen

Die meisten Vermittlungsstellen (Nebenstellenanlagen, Ortsvermittlungsstellen usw.) arbeiten als Verlustsystem. Mit diesem Typ von Vermittlungsstellen befaßt sich die vorliegende Arbeit. Wartemöglichkeit soll in den untersuchten Systemen nirgends bestehen.

Die Teilnehmer treten in zweifacher Eigenschaft auf: Einerseits als rufende Teilnehmer (Quellen des Verkehrs) und andererseits als Gerufene (Endabnehmer des Verkehrs). Die VSt wird auf der Eingangsseite von Quellen mit Rufen beliefert. Jeder Ruf durchläuft die VSt, belegt in jedem durchlaufenen

Bündel eine Leitung und in jeder durchlaufenen KAn gewisse Koppelpunkte und kommt schließlich beim Endabnehmer an. Sämtliche Belegungen bleiben für die Dauer des dann beginnenden Gesprächs bestehen. Sie enden dann, wenn das Gespräch beendet ist. Die somit freigewordenen Koppelpunkte und Leitungen stehen wieder für andere Verbindungen zur Verfügung.

Es sei zugelassen, daß die betrachtete VSt mit über- oder untergeordneten Netzen verbunden ist. Besteht z.B. eine Verbindung zu einem übergeordneten Netz, etwa zum Fernwählnetz, dann haben die ankommenden Fernleitungen die Funktion von Quellen und die abgehenden Fernleitungen die Funktion von Endabnehmern. Solche Quellen speisen ihren Verkehr üblicherweise nicht am Eingang des Konzentrationsabschnitts in die VSt ein, sondern erst hinter der I.GW-Stufe. Die abgehenden Fernverkehre gehen nicht über Leitungswähler ab, sondern verlassen den Expansionsabschnitt schon früher, z.B. hinter der I.GW-Stufe. Analoges gilt für die Verkehre von und zu untergeordneten Netzen.

Für die Struktur der VSt'n wird angenommen, daß sie der Grundform entspricht, also fächerförmig ist (vergl. Abschn. I.1.4). Um den Ausdruck "fächerförmig" genau zu spezifizieren, wird die VSt durch einen Graphen dargestellt, in dem die KAn'en die Knoten und die Bündel die (gerichteten) Kanten bilden. Die Quellen an jedem Zubringerbündel der eingangsseitigen KAn'en der VSt werden dabei jeweils zu einer Quellengruppe (kurz QG) zusammengefaßt und jede QG durch einen Kreis dargestellt. Analog dazu werden die Endabnehmer an jedem Richtungsbündel der ausgangsseitigen KAn'en zu einer Endabnehmergruppe (kurz EG) zusammengefaßt. EG'n sind durch Rechtecke dargestellt. Man besichte dabei, daß die von Leitungswahlstufen abgehenden Richtungsbündel nur eine Leitung haben; die daran angeschlossenen EG'n bestehen also nur aus einem einzigen Endabnehmer. Beispiele von Strukturgraphen sind in den Bildern II.1 und II.2 angegeben.

Als fächerförmig sei die Struktur dann bezeichnet, wenn man von jedem Punkt im Graphen zu jedem andern nur über eine

einzigste Folge von Kanten gelangen kann. Dabei ist es gleichgültig, ob man die Kanten in oder gegen die Richtung des Verkehrs durchläuft. Bild II.1 zeigt ein Beispiel einer VSt mit fächerförmiger Struktur.

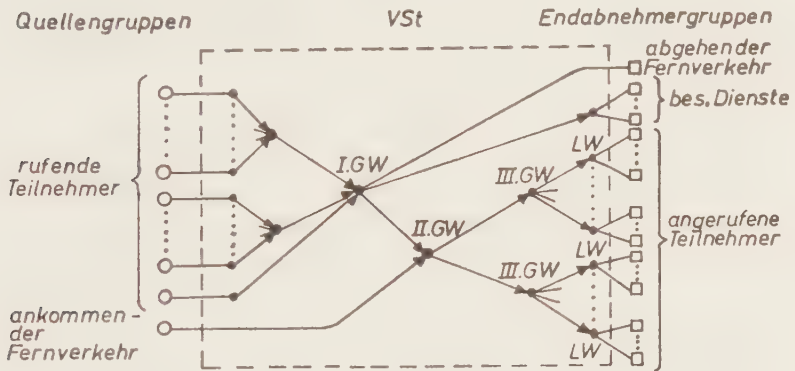


Bild II.1 Beispiel einer VSt mit Fächerstruktur

Nicht fächerförmige Strukturen ergeben sich z.B., wenn man - wie dies bei großen Ortsnetzen u.U. geschieht - die zentrale Vermittlungsstelle in mehrere Teilvermittlungsstellen aufspaltet. Es treten dann Maschen im Graph auf. Ein Beispiel der Aufspaltung in zwei Teilvermittlungsstellen zeigt Bild II.2.

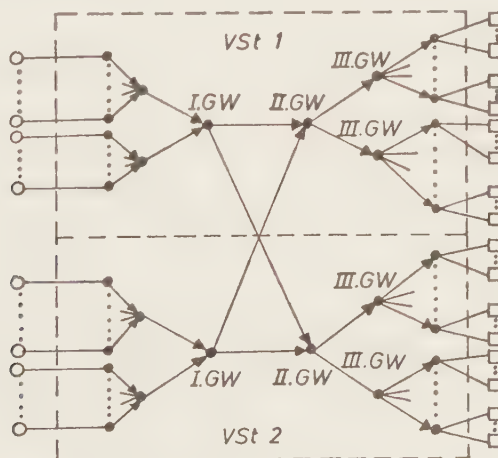


Bild II.2 Beispiel einer VSt mit nicht fächerförmiger Struktur

Die Zustandsgleichungen von VSt'n, deren Strukturgraph Maschen enthält, sind im allgemeinen schwieriger zu lösen als im maschenfreien Fall, also dem der Fächerform. Deshalb seien in der vorliegenden Arbeit immer VSt'n betrachtet, deren Struktur dem Grundtypus von VSt'n entspricht, also maschenfrei ist.

Betreffs der KAN'en sei zunächst vorausgesetzt, daß die in der VSt vorkommenden KAN'en immer vollkommene Erreichbarkeit haben. Diejenigen KAN'en, die mit Richtungswahl betrieben werden, also mehr als ein Abnehmerbündel haben, sollen in allen abgehenden Richtungen vollkommene Erreichbarkeit haben. KAN'en mit sogenannten Überlaufbündeln sollen nicht vorkommen, da sonst im allgemeinen Maschen im Strukturgraph auftreten würden. (Überlaufbündel sind Leitungsbündel, die nur dann zum Verbindungsaufbau herangezogen werden, wenn im Abnehmerbündel der KAN keine Leitung frei ist. Die Leitungen der Überlaufbündel bleiben sonst unbenützt.)

VSt'n mit Fächerstruktur, in denen auch KAN'en mit unvollkommener Erreichbarkeit vorkommen, werden im Abschnitt II.5 untersucht.

II. 1.2 Bildung eines mathematischen Modells

Zur Bildung eines mathematischen Modells (siehe auch Abschnitt I.2) wird angenommen, daß die Dauer der Wahl- und Schaltvorgänge usw. Null ist.

Die Erzeugung der Rufe, die auf den Zubringerbündeln der eingeangsseitigen KAN'en der VSt ankommen, läßt sich erfahrungsgemäß mit guter Wirklichkeitstreue durch Zufallsverkehre beschreiben. Diese Vorstellung sei deshalb auch hier verwendet. Es wird jedoch eine verallgemeinerte Form des Zufallsverkehrs gewählt, die sowohl den Zufallsverkehr 1. Art wie auch den 2. Art (siehe auch Abschn. I.2) als Sonderfall enthält: Für die mittlere Anrufrate Λ einer QG

wird angenommen, daß sie von der Zahl belegter Leitungen x in dem von der QG zur VSt gehenden Bündel abhängt. x ist also die Zahl belegter Quellen. Über die Funktion $\Lambda(x)$ wird vorausgesetzt:

$$\left. \begin{aligned} 0 < \Lambda(x) < \infty & \quad \text{für } 0 \leq x < n, \\ \Lambda(x) = 0 & \quad \text{sonst} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.1.1})$$

n ist darin die Zahl der Leitungen des von der QG zur VSt gehenden Leitungsbündels.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die QG im Zeitintervall $t \dots t+dt$ einen Ruf aussendet, ist also gleich $\Lambda(x) \cdot dt$. Im allgemeinen Fall wird die VSt nicht nur von einer, sondern von $s \geq 1$ QG'n mit Verkehr beliefert. Diese seien mit $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ bezeichnet. $\Lambda_i(x)$ ist dann die mittlere Anruf-rate der i -ten QG, wenn dort " x Quellen belegt" sind.

Die von der VSt abgehenden Rufe gehen über die Richtungs-bündel der ausgangsseitigen KAN'en ab. Diese Richtungs-bündel haben zwar in vielen Fällen nur eine Leitung (z.B. bei Leitungswahlstufen), der allgemeine Fall ist jedoch ein Richtungs-bündel mit mehreren Leitungen. Als Beispiel sei das von einer Ortsvermittlungsstelle ins Landesfernwahl-netz abgehende Bündel betrachtet. Die über diese Bündel abgehenden Rufe können in ihrem weiteren Verlauf außerhalb der VSt noch Blockierungen erfahren. Die abgehenden Rufe erleiden also u.U. außerhalb der VSt noch Verluste. Deshalb seien Parameter eingeführt, die es erlauben, diese "Hemmungen" in Rechnung zu stellen. Dies geschehe durch eine Wahrscheinlichkeit γ , die "Freiwahrscheinlichkeit" genannt sei. γ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein von der VSt abgehender Ruf außerhalb nicht abgewiesen wird. Eine solche Freiwahrscheinlichkeit muß für jedes von der VSt abgehende Bündel angegeben werden. Für γ sei zugelassen,

daß es von der Zahl belegter Leitungen im Bündel x abhängt. $\gamma(x)$ ist also die bedingte Wahrscheinlichkeit für das obengenannte Ereignis unter der Bedingung, daß im Bündel gerade x Leitungen belegt sind. $\gamma(x)$ sei von der Zeit t unabhängig. Es beschreibt die "Senkeneigenschaften" der Endabnehmergruppen, an die die abgehenden Bündel ihre Rufe liefern. Über die Funktion $\gamma(x)$ wird vorausgesetzt:

$$\left. \begin{array}{ll} 0 < \gamma(x) \leq 1 & \text{für } 0 \leq x < n, \\ \gamma(x) = 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \quad (\text{II.1.2})$$

n ist hier die Leitungszahl des zur EG gehenden Bündels. Die Zahl der EG'n einer VSt sei $r \geq 1$. Diese seien mit $E_1, E_2, \dots, E_r$ bezeichnet. $\gamma_j(x)$ ist dann die Freiwahrscheinlichkeit der j -ten EG, wenn dort " x Endabnehmer belegt" sind.

Es fehlen jetzt noch Angaben darüber, an welchen Teilnehmer der Ruf gerichtet ist, wenn die QG Q_i einen Ruf erzeugt, denn darüber sagt die mittlere Anrufrate $\Lambda_i(x)$ nichts aus. Die fehlende Aussage wird durch die Angabe einer Aufteilungswahrscheinlichkeit p_{ij} gemacht. Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein von der QG Q_i erzeugter Ruf ein Ruf an die EG E_j ist. Dieses Ereignis bedeutet, daß die rufende Quelle aus Q_i mit irgendeiner der noch freien Leitungen desjenigen Bündels verbunden werden will, das zur EG E_j führt. Ist E_j z.B. die aus einem einzigen Endabnehmer bestehende EG hinter der Ausgangsleitung einer Leitungswahlstufe, dann ist p_{ij} die Wahrscheinlichkeit, daß die Nummer des an E_j angeschlossenen Teilnehmers gewählt wird, falls in der QG Q_i ein Ruf erzeugt wird. Ein anderes Beispiel ist, daß das zur EG E_j führende Bündel das Leitungsbündel einer Ortsvermittlungsstelle für ins Landesfernwahlnetz abgehende Rufe ist. Dann ist p_{ij} die

Wahrscheinlichkeit, daß ein von der QG Q_i erzeugter Ruf nicht ein "Ortsgespräch", sondern ein "Ferngespräch" ist. Die Ereignisse "Ruferzeugung" und "Auswahl einer bestimmten EG" seien unabhängig voneinander. Damit ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß im Zeitintervall $t \dots t+dt$ von der QG Q_i ein Ruf an die EG E_j ausgesendet wird, unter der Bedingung, daß x Quellen in Q_i belegt sind

$$W\left(Q_i \text{ ruft } E_j \text{ im Zeit-} / x \text{ Quellen be-} \right) = \Lambda_i(x) \cdot p_{ij} \cdot dt \quad . \quad (\text{II.1.3})$$

$$\text{intervall } t \dots t+dt \text{ legt in } Q_i$$

($W(A/B)$ bedeute die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Bedingung B .) Man beachte, daß für p_{ij} gilt:

$$\sum_{j=1}^r p_{ij} = 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, s \quad . \quad (\text{II.1.4})$$

Durch Angabe der Funktionen $\Lambda_i(x)$ und p_{ij} für jede QG ist die Erzeugung der an die VSt gehenden Rufe beschrieben. Durch Angabe der Funktion $\gamma_j(x)$ für jede EG sind die Senkeneigenschaften aller EG'n beschrieben. Durch Angabe des Strukturgraphen und der Leitungszahlen aller Bündel der VSt ist die Wirkungsweise der VSt beschrieben; weitere Angaben sind wegen der früher gemachten Voraussetzungen über die VSt nicht notwendig. Damit ist festgelegt, wie erzeugte Rufe behandelt werden, und es kann für jeden Belegungszustand der VSt ausgesagt werden, ob ein Ruf erfolgreich ist oder an welcher Stelle im System er "verlorengeht", d.h. nicht weiterverbunden werden kann. Die bisher gemachten Angaben betreffen das Entstehen von Verbindungen, und es sind jetzt noch Angaben über das Endigen bereits bestehender Verbindungen notwendig. Dazu wird angenommen, daß die Gesprächsdauern negativ exponentiell verteilt sind. Dies ist eine in der Fernsprechkverkehrstheorie übliche Annahme,

die erfahrungsgemäß gut mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Für die Mittelwerte der Gesprächsdauer sei zugelassen, daß sie davon abhängen, aus welcher QG der Ruf stammt und zu welcher EG die Verbindung geht: Es sei $1/\epsilon_{ij}$ die mittlere Dauer der Verbindungen, die zwischen der QG Q_i und der EG E_j bestehen. Dann ist (siehe z.B. [23], [27]) die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte der zwischen Q_i und E_j bestehenden Verbindungen im Zeitintervall $t...t+dt$ endet

$$W \left(\begin{array}{l} \text{Verbindung } Q_i \text{ nach } E_j \text{ endet} \\ \text{im Zeitintervall } t...t+dt \end{array} \right) = \epsilon_{ij} \cdot dt \quad . \quad (\text{II.1.5})$$

($W(A)$ bedeute die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A .) Durch die Angabe der ϵ_{ij} ($i=1, \dots, s$; $j=1, \dots, r$) liegen die noch fehlenden Informationen über das Endigen der Gespräche vor. Durch die Abhängigkeit der mittleren Gesprächsdauer von i und j kann z.B. berücksichtigt werden, daß Gespräche unter Bekannten im Mittel länger dauern als Gespräche derselben Personen mit Dienststellen.

Die Größen ϵ_{ij} beschreiben zwar Eigenschaften, die zu QG'n und EG'n gleichermaßen gehören. Man kann jedoch die Unterschiedlichkeit der mittleren Gesprächsdauern auch als allein durch die QG'n bestimmt auffassen. Dies sei von nun ab der Fall. Damit sind die QG'n nicht nur für die Ruferzeugung verantwortlich, sondern auch für die Gesprächsbeendigungen. Die QG Q_i ist damit beschrieben durch die Funktionen $\Lambda_i(x)$, p_{ij} , ϵ_{ij} . Die EG E_j dagegen ist beschrieben durch Angabe der Funktion $\gamma_j(x)$.

Als letztes sei nun noch die Voraussetzung gemacht, daß alle QG'n und EG'n voneinander unabhängig, alle Gesprächsdauern voneinander unabhängig und die, die QG'n und EG'n beschreibenden Parameter $\Lambda_i(x)$, p_{ij} , ϵ_{ij} , $\gamma_j(x)$, alle von der Zeit unabhängig seien.

Damit ist ein mathematisches Modell für das aus einer VSt und ihren Teilnehmern bestehende stochastische Bedienungssystem geschaffen, das wie folgt aussieht: QG'n erzeugen Rufe für eine VSt, deren Struktur fächerförmig ist und die aus KAN'en mit vollkommener Erreichbarkeit aufgebaut ist. Die KAN'en werden je nach Lage im System mit oder ohne Richtungswahl betrieben. Die VSt arbeitet als Verlustsystem. Sie stellt Verbindungen zwischen den s QG'n und r EG'n her, deren Dauern negativ exponentiell verteilt sind. Der von den QG'n erzeugte Verkehr ist Zufallsverkehr in einer verallgemeinerten Form, die die Modelle ZV1 ("unendliche Quellenzahl") und ZV2 ("endliche Quellenzahl") als Spezialfälle einschließt. Die EG'n werden durch Freiwahrscheinlichkeiten beschrieben. Damit können Hemmungen, die die von der VSt abgehenden Rufe außerhalb u.U. noch erleiden, berücksichtigt werden. Bezüglich der Zahl der QG'n, der Zahl der EG'n, der Zahl der KAN'en, der Zahl der Zubringer- und Abnehmerbündel jeder KAN und der Leitungszahlen der Bündel im System gibt es keine Beschränkungen. Sie müssen nur endlich bleiben.

II. 2 Die Zustandsgleichungen

II. 2.1 Die Beschreibung des Zustands und der Zustandsraum

s ist die Zahl der QG'n und r die Zahl der EG'n. Die VSt hat Fächerstruktur. Die QG Q_i ist beschrieben durch die Angabe der mittleren Anrufrate $\lambda_i(x)$, der Aufteilungswahrscheinlichkeit p_{ij} und der mittleren Enderate ϵ_{ij} . Die QG'n werden durch einen Kreis dargestellt. Die EG E_j ist durch Angabe der Freiwahrscheinlichkeit $\gamma_j(x)$ beschrieben. Die EG'n werden durch Rechtecke dargestellt. Die KAn'en seien als Knoten und die Leitungsbündel als Kanten dargestellt. Ein Beispiel mit $s = 8$ QG'n und $r = 9$ EG'n zeigt Bild II.3.

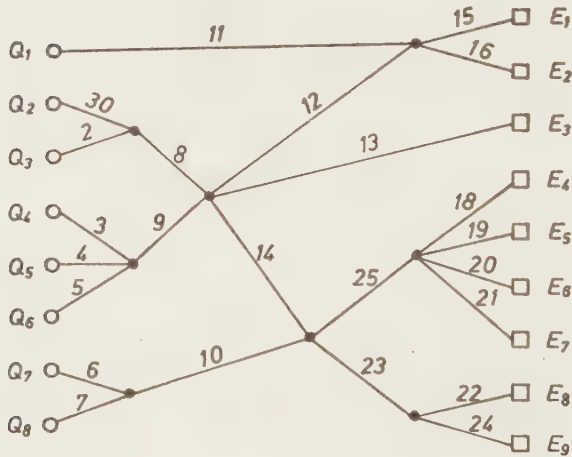


Bild II.3 Beispiel eines Strukturgraphen

Die QG'n und EG'n seien von oben nach unten fortlaufend ab 1 durchnummeriert. Die Bündel seien in irgendeiner Weise mit Nummern versehen; nicht notwendig ab 1 und auch nicht notwendig fortlaufend. Es sei $\mathcal{N}$ die Menge dieser Nummern. Im Beispiel ist also

$$\mathcal{N} = \{30, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \\ 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}.$$

n_l sei die Zahl der Leitungen des Bündels Nr. l . Diese Zahl ist auch gleichzeitig die Zahl der Quellen der QG, wenn das Bündel Nr. l ein direkt von einer QG kommendes Bündel ist. n_l kann auch gleichzeitig die Zahl der Endabnehmer einer EG sein, nämlich dann, wenn das Bündel Nr. l direkt zu einer EG führt.

Es sei, wie im Beispiel von Bild II.3 durchaus zugelassen, daß nicht jede QG jede EG erreicht. Im Beispiel erreicht Q_1 die EG'n $E_3, E_4, \dots, E_9$ nicht und Q_7, Q_8 erreichen E_1, E_2, E_3 nicht. Das entspricht in der Praxis Fällen wie etwa dem, daß u.U. der an einer Ortsvermittlungsstelle ankommende Fernverkehr die besonderen Dienste dieser VSt nicht erreichen kann. Das ist. z.B. dann der Fall, wenn das zu den besonderen Diensten gehende Leitungsbündel bereits an der I.GW-Stufe abzweigt, während der Fernverkehr an der II.GW-Stufe eingeleitet wird.

Es sei $\mathcal{M}$ die Menge der Nummern all derjenigen Paare von QG'n und EG'n, zwischen denen eine Verbindung möglich ist. Im Beispiel von Bild II.3 ist

$$\mathcal{M} = \{ (1,1), (1,2), \\ (2,1), (2,2), \dots, (2,9), \\ \vdots \\ (6,1), (6,2), \dots, (6,9), \\ (7,4), (7,5), \dots, (7,9), \\ (8,4), (8,5), \dots, (8,9) \}.$$

Die Zufallsvariable X_{ij} bezeichne die Zahl der in einem bestimmten Zeitpunkt zwischen Q_i und E_j bestehenden Verbindungen. Dann ist wegen der fächerförmigen Struktur der VSt der Zustand des Systems beschrieben durch den Vektor

$$\chi = (X_{ij}, (i,j) \in \mathcal{M}) \quad (\text{II.2.1})$$

χ besitzt also als Komponenten die Zufallsvariablen $X_{ij}, (i,j) \in \mathcal{M}$. Ω sei die Menge aller Wertetupel die χ wirklich annehmen kann und

$$\omega = (x_{ij}, (i,j) \in \mathcal{M}) \quad (\text{II.2.2})$$

sei ein Element von Ω . Ω ist der Zustandsraum. Er wird später aus formalen Gründen zu einem Ω_* erweitert: $\Omega \subset \Omega_*$. Die Elemente von Ω_* werden dann ebenfalls mit ω bezeichnet (siehe Abschn. II.2.3).

Ω besitzt folgende Eigenschaften: Erstens kann kein x_{ij} negative Werte annehmen. Zweitens kann die Zahl belegter Leitungen in keinem Bündel negativ oder größer als die Leitungszahl sein. Um letzteres formal auszudrücken, wird der Weg von Verbindungen durch die VSt näher betrachtet. Wenn E_j eine von der QG Q_i erreichbare EG ist, dann ist wegen der als fächerförmig vorausgesetzten Struktur der VSt eindeutig festgelegt, über welche Bündel die Verbindungen $Q_i - E_j$ führen. Der Weg ist also für jedes Paar (i,j) eindeutig festgelegt. Im Beispiel von Bild II.3 verläuft z.B. der Weg $Q_2 - E_2$ durch die Bündel mit den Nummern 30, 8, 14, 25, 18. Um die Zahl belegter Leitungen eines bestimmten Bündels auszurechnen, muß bekannt sein, welche Wege durch dieses Bündel verlaufen. Dazu sei die Menge $\mathcal{M}_i$ eingeführt. $\mathcal{M}_i$ sei die Menge der Indexpaare (i,j) all derjenigen Paare $Q_i - E_j$, deren Verbindungen durch das

Bündel Nr. l verlaufen. In Bild II.3 ist z.B. für das Bündel Nr. 12

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2), (6,1), (6,2) \right\}.$$

Die Anzahl belegter Leitungen im Bündel Nr. l ergibt sich - vorausgesetzt, daß das System im Zustand w ist - zu

$$x_{Bl} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}_l} x_{ij} \quad . \quad (\text{II.2.3})$$

Für die Elemente von Ω gilt also

$$0 \leq x_{ij} \quad , \quad (i,j) \in \mathcal{M} \quad ,$$

$$\text{und} \quad 0 \leq x_{Bl} \leq n_l, \quad l \in \mathcal{N} \quad .$$

Dabei ist n_l die oben eingeführte Leitungszahl des Bündels Nr. l .

Abschließend sei noch eine später öfter benötigte Indexmenge eingeführt: Es sei $\mathcal{N}_{ij}$ die Menge der Nummern derjenigen Bündel, über die der Weg $Q_i - E_j$ führt. In Bild II.3 ist z.B.

$$\mathcal{N}_{2,4} = \{ 30, 8, 14, 25, 18 \} \quad .$$

II. 2.2 Die Übergangswahrscheinlichkeiten

Der Zustand der VSt ist durch den Zufallsvektor $\mathcal{X}$ beschrieben. Er verändert sich zufällig mit der Zeit, $\mathcal{X}(t)$ ist also ein stochastischer Prozeß: Es handelt sich hier um einen Markov-Prozeß mit diskretem Zustandsraum Ω und kontinuierlichem Parameter t (Zeit). Er hat - wie noch gezeigt wird -

die spezielle Form eines multidimensionalen Geburts- und Todesprozesses. Die Chapman-Kolmogorov-Gleichung nimmt also im Fall $t \rightarrow \infty$ in der Gl. (I.3.20) entsprechende Form an.

In diesem Abschnitt sollen die Übergänge des Systems von einem Zustand $\omega \in \Omega$ in seine bezüglich der i, j -ten Komponente benachbarten Zustände ω_{ij}^+ , ω_{ij}^- betrachtet werden. ω_{ij}^+ ist analog Gl. (I.3.18a) der nach oben benachbarte Punkt:

$$\omega_{ij}^+ = (\dots, x_{ij} + 1, \dots) , \quad (\text{II.2.4a})$$

und ω_{ij}^- ist analog Gl. (I.3.18b) der nach unten benachbarte Punkt:

$$\omega_{ij}^- = (\dots, x_{ij} - 1, \dots) . \quad (\text{II.2.4b})$$

Man beachte, daß nicht für alle Zustände $\omega \in \Omega$ alle Nachbarzustände ω_{ij}^+ , ω_{ij}^- , $(i, j) \in \mathcal{M}$ zu Ω gehören. Es wird daher später (siehe Abschn. II.2.3) zur Vereinfachung der Rechnungen Ω derart zu einem Zustandsraum Ω_e erweitert werden, daß Ω_e zu jedem Element $\omega \in \Omega$ jeweils alle Nachbarzustände enthält.

Als erstes soll die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, daß sich die Zahl der von Q_i nach E_j gehenden Verbindungen im Zeitintervall $t \dots t+dt$ um 1 erhöht, der Zustand also von

$$\omega \text{ nach } \omega_{ij}^+ ; \omega, \omega_{ij}^+ \in \Omega ; (i, j) \in \mathcal{M}$$

übergeht. Die Wahrscheinlichkeit, daß in der QG Q_i im Zeitintervall $t \dots t+dt$ ein Ruf an die EG E_j erzeugt wird, ist

gemäß Gl.(II.1.3) gleich $\lambda_i(x_{Bl}) \cdot p_{ij} \cdot dt$. Dabei ist l' die Nummer desjenigen Bündels, das die QG Q_i mit der VSt verbindet. x_{Bl} ist die Zahl belegter Leitungen im Bündel Nr. l , also die Zahl belegter Quellen. Ob die VSt die Verbindung zur gewünschten EG E_j herstellen kann, hängt nur davon ab, ob in jedem Bündel entlang des Weges $Q_i - E_j$ noch wenigstens eine Leitung frei ist. (Vergl. das in Abschn. I.1.8 über KAN'en mit vollkommener Erreichbarkeit Gesagte!) Dies kann mittels der Funktion $\mu_l(x_{Bl})$ ausgedrückt werden. $\mu_l(x_{Bl})$ soll eine Funktion sein, die gleich 1 ist, solange im Bündel Nr. l wenigstens noch eine Leitung frei ist. Sie soll sonst gleich Null sein. Also:

$$\left. \begin{aligned} \mu_l(x_{Bl}) &= 1 \quad \text{für} \quad 0 \leq x_{Bl} < n_l, \\ &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2.5})$$

Im Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen (siehe z.B. Abschn. II.5) kann $\mu_l(x_{Bl})$ als bedingte Wahrscheinlichkeit dafür aufgefaßt werden, daß die betreffende KAN im Bündel Nr. l eine freie Leitung findet, unter der Bedingung, daß im Bündel x_{Bl} Leitungen belegt sind.

Nun wird das Produkt all derjenigen $\mu_l(x_{Bl})$ gebildet, für die gilt $l \in \mathcal{N}_{ij}$ und $l \neq l'$. Mit l' war die Nummer des von der QG Q_i kommenden Bündels bezeichnet worden. Das Produkt ist dann eine Funktion, die für jeden Zustand w angibt, ob die VSt eine weitere Verbindung $Q_i - E_j$ herstellen kann (dann ist sie gleich 1) oder nicht (dann ist sie gleich 0). Diese Funktion kann auch als bedingte Wahrscheinlichkeit dafür aufgefaßt werden, daß die VSt eine Verbindung $Q_i - E_j$ herstellen kann unter der Bedingung, daß die VSt im Zustand w ist. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß im Intervall $t \dots t+dt$ ein Ruf $Q_i - E_j$ erzeugt wird und die VSt auch imstande ist, die Verbindung herzustellen, gleich

$$\lambda_i(x_{Bl}) \cdot p_{ij} \cdot dt \cdot \frac{\prod_{\substack{l \in \mathcal{N}_{ij} \\ l \neq l'}} \mu_l(x_{Bl})}{\prod \mu_l(x_{Bl})}.$$

Ob die Verbindung wirklich zustande kommt, hängt nun nur noch davon ab, ob die EG E_j den Ruf annimmt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist (siehe Gl.(II.1.2)) gleich $\gamma_j(x_{B_l^n})$. Dabei ist l^n die Nummer des zur EG E_j führenden Bündels. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß im Intervall $t \dots t+dt$ eine neue Verbindung Q_l-E_j zustande kommt,

$$W(\chi(t+dt) = \omega_{ij}^+ / \chi(t) = \omega)$$

$$= \Lambda_i(x_{B_l^n}) \cdot p_{ij} \cdot \left[\frac{|\epsilon \mathcal{N}_{ij}|}{|\Phi|} \mu_l(x_{B_l^n}) \right] \cdot \gamma_j(x_{B_l^n}) \cdot dt \quad . \quad (II.2.6)$$

Um diese später oft benötigte Wahrscheinlichkeit übersichtlicher ausdrücken zu können, sei die Funktion $\xi_l(x_{B_l^n})$ eingeführt. Es sei

$$\xi_l(x_{B_l^n}) = \Lambda_i(x_{B_l^n}) ,$$

$$= \mu_l(x_{B_l^n}) ,$$

$$= \mu_l(x_{B_l^n}) \cdot \gamma_j(x_{B_l^n}) ,$$

falls l die Nummer eines Bündels ist, das von einer QG kommt. Dabei ist i die Nummer dieser QG.

falls l die Nummer eines Bündels ist, das weder direkt von einer QG kommt noch direkt zu einer EG geht, also zwischen zwei KAn'en verläuft.

falls l die Nummer eines Bündels ist, das zu einer EG führt. Dabei ist j die Nummer dieser EG.

(II.2.7)

Damit ist

$$W(\chi(t+dt) = \omega_{ij}^+ / \chi(t) = \omega) = p_{ij} \cdot \frac{|\epsilon \mathcal{N}_{ij}|}{|\Phi|} \xi_l(x_{B_l^n}) dt , \quad \omega, \omega_{ij}^+ \in \Omega . \quad (II.2.8)$$

Mit Gl.(II.2.8) ist die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand ω in den bezüglich der i, j -ten Komponente nach oben benachbarten Zustand bekannt. Es soll nun die Wahrscheinlich-

keit dafür berechnet werden, daß eines der x_{ij} zwischen Q_i und E_j bestehenden Gespräche im Zeitintervall $t...t+dt$ endet, der Zustand also von w nach w_{ij}^- übergeht. Für die Wahrscheinlichkeit, daß eine zwischen Q_i und E_j bestehende Verbindung im Zeitintervall $t...t+dt$ endet gilt gemäß Gl.(II.1.5)

$$W\left(\begin{array}{l} \text{Ende der Verbindung } Q_i-E_j \text{ im} \\ \text{Intervall } t...t+dt \end{array}\right) = \varepsilon_{ij} \cdot dt \quad . \quad (\text{II.2.9})$$

Wenn x_{ij} Gespräche bestehen, ist sie - da ja alle Gesprächsdauern als voneinander unabhängig angenommen worden waren - x_{ij} mal so groß, also

$$W(X(t+dt) = w_{ij}^- | X(t) = w) = x_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot dt, \quad w, w_{ij}^- \in \Omega, \quad (\text{II.2.10})$$

Die Gleichungen (II.2.8) und (II.2.10) enthalten jeweils dt als Faktor. Damit sind die Wahrscheinlichkeiten, daß sich eine Komponente von $X(t)$ im Zeitintervall $t...t+dt$ um mehr als eine Einheit verändert oder sich mehrere Komponenten gleichzeitig verändern, vernachlässigbar. Der Prozeß geht im Falle einer Zustandsänderung nur in einen direkt benachbarten Zustand im Zustandsraum über. Er ist damit vom Typ des Geburts- und Todesprozesses (vergl. Abschn. I.3). Seine Zustandsgleichungen können mit Hilfe der in den Gleichungen (II.2.8) und (II.2.10) definierten Übergangswahrscheinlichkeiten aufgestellt werden.

II. 2.3 Aufstellung der Zustandsgleichungen

Die Zustandsgleichungen sollen in einer Form aufgestellt werden, die einheitlich für alle $w \in \Omega$ gilt. Da nicht für alle Zustände $w \in \Omega$ alle Nachbarzustände $w_{ij}^+, w_{ij}^-, (i,j) \in \mathcal{M}$ in Ω existieren, wird statt Ω der erweiterte Zustandsraum Ω_e verwendet: Ω_e ist diejenige Menge von Zahlentupeln w , die für alle $w \in \Omega$ neben w selbst auch jeweils alle Nachbarzustände $w_{ij}^+, w_{ij}^-, (i,j) \in \mathcal{M}$ enthält. Es gilt also

$\Omega \subset \Omega_*$. Wahrscheinlichkeiten, die sich auf $\omega \in \Omega_K$ beziehen, sollen im folgenden immer zu Null angenommen werden. (Dabei ist Ω_K das Komplement der Menge Ω bezüglich Ω_* , d.h. $\Omega_K = \Omega_* - \Omega$.) Um dies, insbesondere für Übergangswahrscheinlichkeiten, formal zu gewährleisten, sowie Fallunterscheidungen zu vermeiden, wird eine Hilfsfunktion eingeführt, die wie folgt definiert ist:

$$\left. \begin{aligned} b_{ij}(\omega) &= 1 \text{ für } \omega \in \Omega \\ &\quad \text{und gleichzeitig} \\ &\quad \omega_{ij}^* \in \Omega, \\ &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2.11a})$$

$b_{ij}(\omega)$ besitzt also für alle Zustände ω , die das Hinzukommen einer weiteren Verbindung $G_i - E_j$ gestatten, den Wert 1. Im Hinblick auf die Rechnungen im Teil III der vorliegenden Arbeit sei noch folgende, später gelegentlich verwendete Formulierung angegeben:

$$\left. \begin{aligned} b_{ij}(\omega) &= 0 \text{ für solche Zahlentupel } \omega, \text{ bei} \\ &\quad \text{denen} \\ &\quad \text{entweder die rechte Seite von} \\ &\quad \text{Gl.(II.2.8) - ohne den Faktor } dt \\ &\quad \text{natürlich - gleich Null ist} \\ &\quad \text{oder wenigstens eine Komponente} \\ &\quad \text{von } \omega \text{ negativen Wert hat,} \\ &= 1 \text{ sonst.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2.11b})$$

Analog zu Gl.(I.3.19a) sei der Geburtskoeffizient der i, j -ten Komponente von $\mathcal{X}(t)$ mit $\phi_{ij}(\omega)$ bezeichnet. Er berechnet sich gemäß Gl.(I.3.8a). Eine für alle $\omega \in \Omega_*$ gültige Form erhält man, wenn man die rechte Seite von Gl.(II.2.8), ohne den Faktor dt natürlich, mit $b_{ij}(\omega)$ multipliziert:

$$\phi_{ij}(\omega) = p_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{N}_{ij}}{\| \zeta_i(x_{\alpha}) \|} \right] \cdot b_{ij}(\omega), \quad \omega \in \Omega_* \quad . \quad (\text{II.2.12})$$

Zur allgemeinen Formulierung der Sterbekoeffizienten wird eine Funktion $b_{ij}^*(\omega)$ benötigt, die für all diejenigen Fälle den Wert 1 besitzt, in denen mindestens eine Verbindung $Q_i - E_j$ besteht:

$$\begin{aligned} b_{ij}^*(\omega) &= 1 \text{ für } \omega \in \Omega \\ &\quad \text{und gleichzeitig} \\ &\quad \omega_{ij}^- \in \Omega, \\ &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$b_{ij}^*(\omega) = b_{ij}(\omega_{ij}^-) .$$

Der Sterbekoeffizient der i, j-ten Komponente von $\mathcal{X}$ sei analog zu Gl. (I.3.19b) mit $\Theta_{ij}(\omega)$ bezeichnet. Gemäß Gl. (I.3.8a) ergibt sich $\Theta_{ij}(\omega)$ aus der rechten Seite von Gl. (II.2.10) - dt natürlich weglassen - und mittels $b_{ij}(\omega)$ zu

$$\Theta_{ij}(\omega) = \epsilon_{ij} \cdot x_{ij} \cdot b_{ij}(\omega_{ij}^-), \quad \omega \in \Omega_e . \quad (\text{II.2.13})$$

$P(\omega)$ sei die Zustandswahrscheinlichkeit der VSt:

$$P(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} W(\mathcal{X}(t) = \omega) .$$

Die Zustandsgleichungen lauten gemäß Gl. (I.3.20):

$$0 = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} \left[\phi_{ij}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega_{ij}^-) - (\Theta_{ij}(\omega) + \phi_{ij}(\omega)) \cdot P(\omega) + \Theta_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P(\omega_{ij}^+) \right], \quad \omega \in \Omega . \quad (\text{II.2.14})$$

Die normierende Bedingung lautet gemäß Gl. (I.3.14):

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1 . \quad (\text{II.2.15})$$

Mit den Gleichungen (II.2.14) und (II.2.15) liegen die Zustandsgleichungen des multidimensionalen Geburts- und Todesprozesses $\mathcal{X}(t)$ vor.

II. 3 Lösung der Zustandsgleichungen

II. 3.1 Die Lösung

Das System der Zustandsgleichungen besteht aus dem homogenen linearen System (II.2.14) und der normierenden Bedingung (II.2.15). Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Lösung zu finden. Z.B. kann man Gl.(II.2.14) als partielles Differenzengleichungssystem auffassen und die dafür gültigen Lösungsmethoden anwenden. Dieser Weg führt aber schon in einfachen Fällen zu sehr langwierigen Rechnungen. Deshalb wurde hier ein anderer Weg beschritten: Gl.(II.2.14) läßt sich in folgende Form umschreiben:

$$0 = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} \left[(\phi_{ij}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega_{ij}^-) - \Theta_{ij}(\omega) \cdot P(\omega)) - (\phi_{ij}(\omega) \cdot P(\omega) - \Theta_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P(\omega_{ij}^+)) \right], \omega \in \Omega. \quad (\text{II.3.1})$$

Wenn man den Inhalt der linken runden Klammer mit $T_{ij}(\omega)$ bezeichnet und den der rechten runden Klammer mit $T_{2ij}(\omega)$, dann lautet das Gleichungssystem:

$$0 = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} \left[T_{ij}(\omega) - T_{2ij}(\omega) \right], \omega \in \Omega. \quad (\text{II.3.2})$$

Im folgenden wird nun die Lösung der Zustandsgleichungen gefunden, indem eine spezielle Eigenschaft von Gl.(II.3.2) ausgenutzt wird: Es genügt, die Lösung von $T_{ij}(\omega) = 0$ zu suchen, da für alle $\omega \in \Omega$ aus der Beziehung $T_{ij}(\omega) = 0$ folgt $T_{2ij}(\omega) = 0$, wie nachfolgend bewiesen wird.

Wie man aus Gl.(II.3.1) sieht, gilt

$$T_{2ij}(\omega) = T_{ij}(\omega_{ij}^+) \quad . \quad (\text{II.3.3})$$

Setzt man also voraus, daß $T_{ij}(\omega) = 0$ ist für alle $\omega \in \Omega$, dann ist $T_{2ij}(\omega)$ gleich Null für alle $\omega \in \Omega$, für die gleichzeitig $\omega_{ij}^+ \in \Omega$ ist. Es bleibt noch der Fall $\omega \in \Omega$, $\omega_{ij}^+ \in (\Omega_e \cap \Omega_K)$ zu betrachten. Dann ist aber $T_{2ij}(\omega)$ ebenfalls gleich Null, da dann $\phi_{ij}(\omega)$ und $P(\omega_{ij}^+)$ verschwinden. Damit

ist gezeigt, daß aus der Beziehung $T_{ij}(\omega) = 0$ die Beziehung $T_{2ij}(\omega) = 0$ folgt. Es wird nun also $T_{ij}(\omega)$ gleich Null gesetzt. Dazu wird eine Eigenschaft von x_{Bl} benötigt, die im Folgenden hergeleitet wird. x_{Bl} ist gemäß Gl.(II.2.3) aus den Komponenten von ω ausrechenbar, also eine Funktion $x_{Bl}(\omega)$. Es war $\mathcal{N}$ die Gesamtmenge der Nummern der Bündel, die in der VST vorkommen und $\mathcal{N}_{ij}$ die Menge der Nummern derjenigen Bündel, über die der Weg $Q_i - E_j$ führt. $\mathcal{N}$ wird in zwei fremde Mengen zerlegt: In $\mathcal{N}_{ij}$ und das Komplement von $\mathcal{N}_{ij}$, das mit $\mathcal{N}_{ijk}$ bezeichnet sei. $\mathcal{N}_{ijk}$ ist also die Menge der Nummern all derjenigen Bündel der VST, über die der Weg $Q_i - E_j$ nicht führt. Es ist also

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{ij} \cup \mathcal{N}_{ijk} . \quad (\text{II.3.4})$$

Damit gilt:

$$\left. \begin{aligned} x_{Bl}(\omega_{ij}^-) &= x_{Bl}(\omega) - 1, \text{ falls } l \in \mathcal{N}_{ij} , \\ &= x_{Bl}(\omega) , \text{ falls } l \in \mathcal{N}_{ijk} \end{aligned} \right\} \omega \in \Omega . \quad (\text{II.3.5})$$

Im Hinblick auf spätere Rechnungen sei hier noch folgende weitere Beziehung angeben:

$$\left. \begin{aligned} x_{Bl}(\omega_{ij}^+) &= x_{Bl}(\omega) + 1, \text{ falls } l \in \mathcal{N}_{ij} , \\ &= x_{Bl}(\omega) , \text{ falls } l \in \mathcal{N}_{ijk} \end{aligned} \right\} \omega \in \Omega . \quad (\text{II.3.6})$$

Die Beziehung $T_{ij}(\omega) = 0$ ergibt nach Einsetzen von $\varnothing_{ij}(\omega)$ gemäß Gl.(II.2.12) und von $\Theta_{ij}(\omega)$ gemäß Gl.(II.2.13) folgende Rekursionsformel für $P(\omega)$:

$$P(\omega) = P(\omega_{ij}^-) \cdot \frac{\left(\frac{p_{ij}}{e_{ij}} \right)}{x_{ij}} \cdot \prod_{l \in \mathcal{N}_{ij}} \zeta_l(x_{Bl}(\omega) - 1) . \quad (\text{II.3.7})$$

Man geht aus vom Wert

$$P_0 = P(0, 0, \dots, 0) .$$

Nun durchlaufe die i, j -te Komponente von ω die Werte $1, 2, 3, \dots$ bis x_{ij} . Dann ergibt sich mit Gl.(II.3.7) für beliebiges, nichtnegatives, ganzzahliges x_{ij} :

$$P(0, \dots, 0, x_{ij}, 0, \dots, 0) = P_0 \cdot \frac{\left(\frac{p_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \cdot \prod_{\substack{\ell \in \mathcal{N}_{ij} \\ v=0}} \frac{x_{ij}-1}{\zeta_\ell(v)} \quad (II.3.8)$$

Als nächstes durchlaufe die e,f-te Komponente von ω die Werte 1,2,3,... bis x_{ef} , während x_{ij} seinen Wert behält. Bevor die Rekursionsformel (II.3.7) angewendet wird, sei eine neue Indexmenge $\mathcal{N}_{ij}^{(ef)}$ eingeführt und dann Gl.(II.3.8) etwas umgeformt. $\mathcal{N}_{ij}^{(ef)}$ sei die Menge derjenigen Elemente von $\mathcal{N}_{ij}$, die nicht gleichzeitig Element von $\mathcal{N}_{ef}$ sind. Damit kann man Gl.(II.3.8) wie folgt umschreiben:

$$P(0, \dots, 0, x_{ij}, 0, \dots, 0) = P_0 \cdot \frac{\left(\frac{p_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \cdot \left[\prod_{\substack{\ell \in \mathcal{N}_{ij}^{(ef)} \\ v=0}} \frac{x_{ij}-1}{\zeta_\ell(v)} \right] \cdot \left[\prod_{\substack{\ell \in (\mathcal{N}_{ij} \cap \mathcal{N}_{ef}) \\ v=0}} \frac{x_{ij}-1}{\zeta_\ell(v)} \right]$$

Nun wird die Rekursionsformel (II.3.7) für $x_{ef} = 1, 2, 3, \dots$ angewendet, und es ergibt sich hieraus für beliebige, nichtnegative, ganzzahlige Werte von x_{ef} :

$$\begin{aligned} P(0, \dots, 0, x_{ij}, 0, \dots, 0, x_{ef}, 0, \dots, 0) &= P(0, \dots, 0, x_{ij}, 0, \dots, 0) \cdot \frac{\left(\frac{p_{ef}}{\varepsilon_{ef}}\right)^{x_{ef}}}{x_{ef}!} \cdot \left[\prod_{\substack{\ell \in (\mathcal{N}_{ij} \cap \mathcal{N}_{ef}) \\ v=x_{ij}}} \frac{x_{ij}+x_{ef}-1}{\zeta_\ell(v)} \right] \\ &\quad \cdot \left[\prod_{\substack{\ell \in \mathcal{N}_{ef}^{(ij)} \\ v=0}} \frac{x_{ef}-1}{\zeta_\ell(v)} \right], \\ &= P_0 \cdot \frac{\left(\frac{p_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \cdot \frac{\left(\frac{p_{ef}}{\varepsilon_{ef}}\right)^{x_{ef}}}{x_{ef}!} \cdot \left[\prod_{\substack{\ell \in \mathcal{N}_{ij}^{(ef)} \\ v=0}} \frac{x_{ij}-1}{\zeta_\ell(v)} \right] \\ &\quad \cdot \left[\prod_{\substack{\ell \in (\mathcal{N}_{ij} \cap \mathcal{N}_{ef}) \\ v=0}} \frac{x_{ij}+x_{ef}-1}{\zeta_\ell(v)} \right] \\ &\quad \cdot \left[\prod_{\substack{\ell \in \mathcal{N}_{ef}^{(ij)} \\ v=0}} \frac{x_{ef}-1}{\zeta_\ell(v)} \right]. \end{aligned}$$

Wegen Gl.(II.2.3) kann man in den Produkten $\prod_{\nu=0}^{\dots} \zeta_l(\nu)$ für die obere Grenze jeweils $x_{Bl}-1$ schreiben und dann die drei eckigen Klammern zusammenfassen. Man erhält:

$$P(0, \dots, 0, x_{ij}, 0, \dots, 0, x_{ef}, 0, \dots, 0) = P_0 \cdot \frac{\left(\frac{p_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \cdot \frac{\left(\frac{p_{ef}}{\varepsilon_{ef}}\right)^{x_{ef}}}{x_{ef}!} \cdot \frac{l \in (\mathcal{N}_{ij} \cup \mathcal{N}_{ef})}{\prod} \frac{x_{Bl}-1}{\prod_{\nu=0}} \zeta_l(\nu) .$$

Setzt man das Verfahren analog fort, dann kommt für jede neue Komponente x_{kl} , die man die Werte $0, 1, 2, \dots$ durchlaufen läßt, ein Faktor $(p_{kl}/\varepsilon_{kl})^{x_{kl}}/x_{kl}!$ hinzu. Im Produkt $\prod_{l \in \dots}$ kommt in der runden Klammer jeweils die Menge $\mathcal{N}_{kl}$ hinzu. Damit gilt:

$$P(\omega) = P_0 \cdot \left[\frac{\prod_{(i,j) \in \mathcal{M}} \left(\frac{p_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \right] \left[\frac{l \in \left(\bigcup_{(i,j) \in \mathcal{M}} \mathcal{N}_{ij}\right)}{\prod} \frac{x_{Bl}-1}{\prod_{\nu=0}} \zeta_l(\nu) \right] .$$

Es ist

$$\bigcup_{(i,j) \in \mathcal{M}} \mathcal{N}_{ij} = \mathcal{N} .$$

Also ist

$$P(\omega) = P_0 \cdot F(\omega) , \quad (\text{II.3.9})$$

$$\text{mit} \quad F(\omega) = \left[\frac{\prod_{(i,j) \in \mathcal{M}} \left(\frac{p_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \right] \left[\frac{l \in \mathcal{N}}{\prod} \left[\frac{x_{Bl}(\omega)-1}{\prod_{\nu=0}} \zeta_l(\nu) \right] \right], \omega \in \Omega_2. \quad (\text{II.3.10})$$

Für $x_{Bl}(\omega)$ gilt Gl.(II.2.3),
für $\zeta_l(\nu)$ gilt Gl.(II.2.7),
und für die Anwendung des Produktzeichens $\prod$ gilt:

$$\prod_{\nu=0}^{-1} f(\nu) = 1 \text{ und } \prod_{\nu=0}^a f(\nu) = 0, \text{ falls } a < -1.$$

$$\text{Weiter ist } \frac{1}{a!} = 0, \text{ falls } a < 0.$$

P_0 ergibt sich aus der normierenden Bedingung Gl.(II.2.15).
Damit ist

$$P(\omega) = \frac{F(\omega)}{\sum_{\tau \in \Omega} F(\tau)} \quad . \quad (\text{II.3.11})$$

Das Ziel dieses Abschnitts war, die Lösung $P(\omega)$ der Zustandsgleichungen, bestehend aus dem homogenen, linearen System (II.2.14) und der normierenden Bedingung (II.2.15), zu finden. Mit den Gleichungen (II.3.11) und (II.3.10) liegt die Lösung vor. Sie ist (vergleiche Abschn. I.3) eindeutig.

II. 3.2 Bemerkungen

- A) Für aus mehreren KAN'en aufgebaute Vermittlungssysteme der hier betrachteten Art sind in der bisherigen Literatur kaum Lösungen der Zustandsgleichungen bekannt geworden.

a) Die Untersuchungen z.B. in [5], [6] und Kap.X in [27] betreffen die im folgenden genannten Anordnungen oder Anordnungen, die Spezialfälle der genannten Anordnungen darstellen:

Erstens: Mehrere KAN'en mit je einem Zubringer- und einem Abnehmerbündel werden von je einer QG mit Verkehr beliefert; der von diesen KAN'en abgehende Verkehr wird einer KAN mit mehreren Zubringerbündeln, aber nur einer abgehenden Richtung zugeführt.

Zweitens: Eine KAN hat zwar nur ein Zubringerbündel, aber mehrere abgehende Richtungs-bündel; die auf diesen Richtungs-bündeln abgehenden Verkehre werden KAN'en mit nur je einem Zubringerbündel und einem Abnehmerbündel zugeführt.

Die Rufe durchlaufen in den unter a) genannten Anordnungen also höchstens zwei KAN'en. Die verwendeten KAN'en haben entweder vollkommene Erreichbarkeit oder sind im Falle der unvollkommenen Erreichbarkeit einstufig und lassen sich durch die Modellvorstellung der Durchlaßwahrscheinlichkeiten beschreiben. Für die Ruferzeugung in den QG'n wird meist das Modell ZV1 ("unendliche Quellenzahl") verwen-

det. Für die Rufe, die von den zuletzt durchlaufenen KAN'en abgehen, wird immer angenommen, daß sie keine weiteren Hemmungen erfahren.

b) In Kap. 8 von [2] wird eine explizite Lösungsformel für die Zustandsgleichungen einer Klasse von Vermittlungssystemen mit sehr allgemeiner Struktur angegeben. Diese Klasse schließt zwar die hier betrachteten VSt'n mit Fächerstruktur ein, es wird jedoch in [2] von wesentlich weniger allgemeinen Eigenschaften der Quellen- und Endabnehmergruppen ausgegangen, als bei den in Abschn. II der vorliegenden Arbeit betrachteten Systemen: α) Statt beliebiger Anzahl haben alle QG'n genau eine Quelle und es wird vorausgesetzt $\Lambda_i(0) = \Lambda_0$ für $i=1,2,\dots,s$. β) Statt beliebiger Anzahl haben alle EG'n genau einen Endabnehmer und es wird vorausgesetzt $\gamma_j(0)=1$ für $j=1,2,\dots,r$. γ) Es werden folgende Einschränkungen für die mittleren Enderaten und die Aufteilungswahrscheinlichkeiten gemacht:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{ij} = \epsilon \\ p_{ij} = 1/r \end{array} \right\} \forall (i,j) \in \mathcal{M}.$$

Demgegenüber liegt mit Gl.(II.3.10) die Lösung der Zustandsgleichungen für Vermittlungsstellen mit Fächerstruktur (vergl. die Definition des Begriffes "fächerförmige Struktur" in Abschn. II.1.1) und sehr allgemeinen Eigenschaften der Quellen- und Endabnehmergruppen vor: Für die Ruferzeugung in den QG'n wird ein sehr allgemeines Modell verwendet, das insbesondere die Fälle ZV1 ("unendliche Quellenzahl") und ZV2 ("endliche Quellenzahl") einschließt. Hemmungen, die die von der VSt abgehenden Rufe u.U. erfahren, werden berücksichtigt. Die KAN'en haben vollkommene Erreichbarkeit oder sind (vergl. Abschn. II.5) im Falle der unvollkommenen Erreichbarkeit einstufig und können durch die Modellvorstellung der Durchlaßwahrscheinlichkeiten beschrieben werden.

- B) Natürlich sind mit Gl.(II.3.10) die Zustandsgleichungen all derjenigen Systeme gelöst, die als Spezialfall der hier betrachteten Klasse von VSt'n aufgefaßt werden können. Es sei nur ein Beispiel erwähnt: Die VSt bestehe aus einer einzigen KAN mit mehreren Zubringerbündeln und mehreren Abnehmerbündeln. Sie soll vollkommene Erreichbarkeit in allen abgehenden Richtungen haben. Die QG'n sollen ZV2 erzeugen ("endliche Quellenzahl"), und die von der KAN abgehenden Rufe sollen keine weiteren Hemmungen erfahren. Für die Zustandsgleichungen einer so betriebenen KAN ist unseres Wissens bisher keine Lösung bekannt geworden.
- C) Man könnte daran denken, die Zustandsgleichungen (Gleichungssystem (II.2.14)+(II.2.15)) für interessierende Fälle numerisch zu lösen. Dies gelingt mittels derzeitiger elektronischer Großrechenanlagen u.U. noch für $(1...3) \cdot 10^4$ Unbekannte. So etwas ist z.B. möglich, wenn Überrelaxation angewendet werden kann, und die Koeffizienten in Form von Funktionen vorliegen, so daß ihr Wert nicht abgespeichert werden muß; wird der Wert eines Koeffizienten benötigt, dann wird er jedesmal neu berechnet. Verwendet man dagegen die explizite Formel für die Zustandswahrscheinlichkeiten (Gl.(II.3.10)+(II.3.11)), dann lassen sich die Verkehrsgrößen noch für VSt'n berechnen, deren Zahl der Zustände wesentlich über der oben genannten Zahl liegt.
- D) Es sei darauf hingewiesen, daß sich zwar die Zustandsgleichungen von Geburts- und Todesprozessen immer auf die Form von Gl.(II.3.2) bringen lassen, daß aber der in Abschn. II.3.1 begangene Weg, sie zu lösen, nicht immer möglich ist. Der Grund ist, daß aus $I_{ij}(\omega) = 0$ nicht grundsätzlich $I_{2ij}(\omega) = 0$ folgt. Vielmehr gilt das nur für spezielle Formen von $\phi_{ij}(\omega)$ und $\Theta_{ij}(\omega)$. Ein solcher Fall liegt hier mit den Formen gemäß Gl.(II.2.12) bzw. (II.2.13) vor.

II. 4 Verkehrsgrößen

Welche Größen bei der verkehrstheoretischen Analyse von Wählnetzen, hier also einer VSt, von Interesse sind, hängt vom Einzelfall ab. Es werden daher in diesem Abschnitt nur einige Beispiele aus der Vielzahl möglicher Verkehrsgrößen betrachtet. Die Grundlage zur Berechnung von Verkehrsgrößen ist die Kenntnis der Zustandswahrscheinlichkeiten $P(\omega)$. Diese sind gemäß Abschn. II.3 bekannt. Wie man mit ihrer Hilfe Verkehrsgrößen berechnet, wird im folgenden gezeigt. Dabei werden die für die Fernspreerverkehrstheorie typischen Schlußweisen benutzt.

II. 4.1 Verkehrsgrößen für den von der i-ten Quellengruppe zur j-ten Endabnehmergruppe gehenden Verkehrsstrom

Die Durchschaltung von Rufen erfolgt von KAN zu KAN. An jeder KAN wird geprüft, ob der Ruf weiterverbunden werden kann oder nicht. Damit wird von allen Rufen, die die QG Q_i an die EG E_j sendet, ein gewisser Teil schon an der ersten zu durchlaufenden KAN, ein weiterer Teil erst an der zweiten zu durchlaufenden KAN usw. abgewiesen werden. Interessierende Verkehrsgrößen des Verkehrsstromes $Q_i - E_j$ sind damit z.B. die mittleren Zahlen von Rufen pro Zeiteinheit, die an den einzelnen KAN'en entlang des Weges $Q_i - E_j$ abgewiesen werden. Ein anderes Beispiel ist die mittlere Zahl gleichzeitig bestehender Verbindungen zwischen Q_i und E_j .

Als erstes sei die mittlere Zahl von gleichzeitig zwischen der QG Q_i und der EG E_j bestehenden Gesprächen berechnet. Dies ist die Verkehrsbelastung $V^*(i,j)$. Es ist X_{ij} die Zahl gleichzeitiger Verbindungen zwischen Q_i und E_j . Damit ist $V^*(i,j)$ der Erwartungswert von X_{ij} , also

$$V^*(i,j) = \sum_{\omega \in \Omega} x_{ij} \cdot P(\omega) \quad . \quad (II.4.1)$$

Die mittlere Zahl derjenigen Gespräche, die pro Zeiteinheit zwischen Q_i und E_j beginnen, sei mit $c_i^*(i,j)$ bezeichnet

(mittlere Lastzufuhr). Die mittlere Zahl von Gesprächen, die pro Zeiteinheit zwischen Q_i und E_j beginnen, ist, wenn die VSt im Zustand ω ist, gleich $\phi_{ij}(\omega)$. Also ist

$$c_{ij}^*(i,j) = \sum_{\omega \in \Omega} \phi_{ij}(\omega) \cdot P(\omega) \quad . \quad (\text{II.4.2})$$

Die Berechnung von mittleren Zahlen abgewiesener Rufe pro Zeiteinheit sei am Beispiel des Verkehrsstromes $Q_5 - E_2$ der VSt vom Bild II.4 erklärt. Die Formulierung für den allgemeinen Fall, also den Weg $Q_i - E_j$ in einer allgemeinen VSt mit Fächerstruktur läßt sich im Prinzip leicht angeben. Das sei jedoch der Kürze wegen hier nicht durchgeführt.

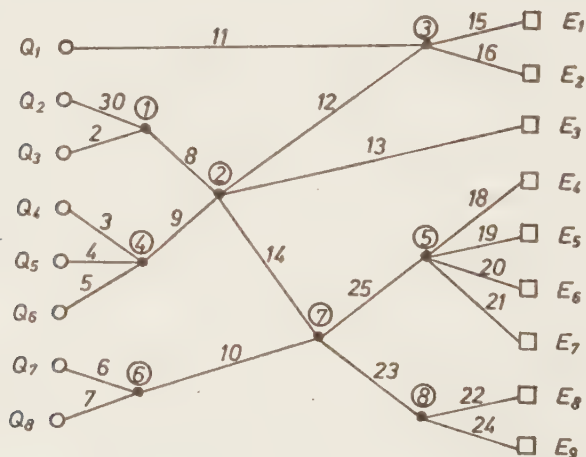


Bild II.4 VSt gemäß Bild II.3 mit Numerierung der einzelnen KAn'en

Der Weg von Q_5 nach E_2 führt über drei KAN'en, deren Nummern - entsprechend der Numerierung von Bild II.4 - 4, 2, 3 sind (siehe a. Bild II.5). Es ist angenommen, daß E_2 dem allgemeinen Fall einer EG entspricht, d.h. für die Leitungszahl des Bündels Nr. 16 gilt: $n_{16} \geq 1$.

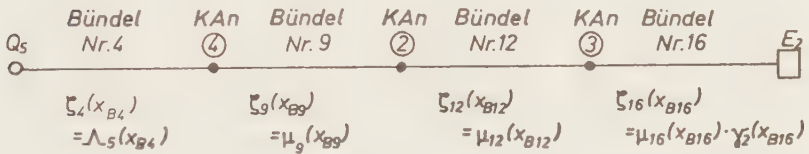


Bild II.5 Der Weg $Q_5 - E_2$ der VSt von Bild II.4 (betrifft x_{B_i} siehe Gl.(II.2.3))

Es sei KAN Nr. 2 betrachtet. Dann ist $\Lambda_5(x_{B_4}) \cdot p_{52}$ die mittlere Zahl von Rufen pro Zeiteinheit, die die QG Q_5 an die EG E_2 sendet, falls die VSt im Zustand ω ist. Die mittlere Anzahl dieser Rufe, die an der KAN Nr. 2 noch ankommen, ist dann gleich $\Lambda_5(x_{B_4}) \cdot p_{52} \cdot \mu_9(x_{B_9})$. Die Erklärung hierfür ist, daß $\mu_9(x_{B_9})$ als Wahrscheinlichkeit dafür aufgefaßt werden kann, daß ein an der KAN Nr. 4 ankommender und dort zur KAN Nr. 2 zielender Ruf an der KAN Nr. 4 durchverbunden werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, daß die KAN Nr. 2 Rufe, die an ihr ankommen und zur KAN Nr. 3 zielen, nicht durchschalten kann, ist $1 - \mu_{12}(x_{B_{12}})$. Damit ist die mittlere Rate der Rufe $Q_2 - E_5$, die an der KAN Nr. 2 abgewiesen werden gleich

$$\Lambda_5(x_{B_4}) \cdot p_{52} \cdot \mu_9(x_{B_9}) \cdot (1 - \mu_{12}(x_{B_{12}}))$$

Dies gilt für den Fall, daß die VSt im Zustand ω ist. Der Erwartungswert des obigen Produkts ist dann die mittlere Zahl derjenigen Rufe pro Zeiteinheit, die von Q_5 an E_2 ge-

sendet werden und an der KAN Nr. 2 abgewiesen werden. Sie sei mit $c_v^*(5,2,2)$ bezeichnet (das erste Argument bedeutet die Nummer der QG, das zweite die der EG und das dritte die der KAN). Es ist

$$c_v^*(5,2,2) = \sum_{\omega \in \Omega} \Lambda_5(x_{B_4}) \cdot p_{52}(x_{B_9}) \cdot (1 - \mu_2(x_{B_2})) \cdot P(\omega) \quad . \quad (II.4.3)$$

Berechnet man sich solche und ähnliche Größen für die KAN'en Nr. 4, 2, 3, dann sieht man, daß sich immer folgende Formel ergibt:

$$c_{...}^* = \sum_{\omega \in \Omega} \Lambda_5(x_{B_4}) \cdot p_{52} \cdot fkt(\omega) \cdot P(\omega) \quad . \quad (II.4.4)$$

$fkt(\omega)$ hat die in der Tafel II.6 angegebene Produktform. Die allgemeinen Definitionen der dort verwendeten Größen sind:

- $c_A^*(i, j, m)$ = mittlere Zahl der pro Zeiteinheit an der KAN Nr. m ankommenden Rufe, die aus der QG Q_i stammen und zur EG E_j zielen .
- $c_v^*(i, j, m)$ = mittlere Zahl der pro Zeiteinheit in der QG Q_i erzeugten, an die EG E_j gerichteten und aber in der KAN Nr. m abgewiesenen Rufe .
- $c_D^*(i, j, m)$ = mittlere Zahl der an der KAN Nr. m weiterverbundenen Rufe des Rufstroms $Q_i - E_j$ pro Zeiteinh. .
- $c_w^*(i, j, m)$ = mittlere Zahl derjenigen Rufe des Verkehrstroms $Q_i - E_j$ pro Zeiteinheit, die in ihrem weiteren Verlauf hinter der KAN Nr. m noch irgendwo abgewiesen werden.

Tafel II.6 enthält der Vollständigkeit halber ganz rechts noch eine zusätzliche Spalte. Setzt man die in deren oberster Zeile enthaltene Form von $fkt(\omega)$ in Gl.(II.4.4) ein, dann erhält man ebenfalls eine mittlere Anzahl von Rufen pro Zeiteinheit. Es sind die aus der QG Q_5 stammenden und an der ~~EG~~ E_2 pro Zeiteinheit ankommenden Rufe. Die Form von

$fkt(\omega)$ aus der zweitobersten Zeile der ganz rechts stehenden Spalte ergibt schließlich folgende mittlere Zahl von Rufen pro Zeiteinheit: Es sind diejenigen Rufe, die über das Bündel Nr. 16 die VSt verlassen, aus der QG Q_5 stammen und außerhalb der VSt irgendwo abgewiesen werden.

	$m = 4$	$m = 2$	$m = 3$	E_2
$c_A^*(5, 2, m)$	1	μ_9	$\mu_9 \cdot \mu_{12}$	$\mu_9 \cdot \mu_{12} \cdot \mu_{16}$
$c_V^*(5, 2, m)$	$(1 - \mu_9)$	$\mu_9 \cdot (1 - \mu_{12})$	$\mu_9 \cdot \mu_{12} \cdot (1 - \mu_{16})$	$\mu_9 \cdot \mu_{12} \cdot \mu_{16} \cdot (1 - \gamma_2)$
$c_D^*(5, 2, m)$	μ_9	$\mu_9 \cdot \mu_{12}$	$\mu_9 \cdot \mu_{12} \cdot \mu_{16}$	
$c_W^*(5, 2, m)$	$\mu_9 (1 - \mu_{12})$ $+ \mu_9 \cdot \mu_{12} \cdot (1 - \mu_{16})$ $+ \mu_9 \cdot \mu_{12} \cdot \mu_{16} \cdot (1 - \gamma_2)$	$\mu_9 \cdot \mu_{12} \cdot (1 - \mu_{16})$ $+ \mu_9 \cdot \mu_{12} \cdot \mu_{16} \cdot (1 - \gamma_2)$	$\mu_9 \cdot \mu_{12} \cdot \mu_{16} \cdot (1 - \gamma_2)$	

Tafel II.6 Beispiele für die Funktion $fkt(\omega)$ von Gl. (II.4.4). Die Argumente der μ - und γ -Funktionen sind der Einfachheit halber weggelassen.

Aus dieser Tafel kann man folgende sehr einleuchtende Fakten entnehmen:

- x) Das $c_D^*(i, j, m)$ für eine bestimmte KAN des Weges Q_5-E_2 ist gleich dem $c_A^*(i, j, m)$ für die nächste KAN auf diesem Weg.
- x) Das $c_A^*(i, j, m)$ für die KAN Nr. m auf dem Weg Q_5-E_2 ist gleich der Summe von $c_V^*(i, j, m)$ und $c_D^*(i, j, m)$.
- x) Das $c_W^*(i, j, m)$ für die KAN Nr. m am Weg Q_5-E_2 ist gleich der Summe der $c_V^*(i, j, m)$ aller auf diesem Wege nachfolgenden KAN'en und der EG.

Damit läßt sich der Strom der Rufe Q_5-E_2 wie folgt deuten: Er hat anfangs die Stärke $c_A^*(5,2,4)$ und verliert unterwegs die Anteile $c_V^*(5,2,4)$, $c_V^*(5,2,2)$, $c_V^*(5,2,3)$. Schließlich verliert er noch Rufe aufgrund der Hemmungen außerhalb der VSt (vergl. Spalte ganz rechts, zweite Zeile von oben in Tafel II.5!). Was vom gesamten Strom übrig bleibt, ist die mittlere Anzahl der Gesprächsbeginne pro Zeiteinheit zwischen Q_5 und E_2 , die gemäß Gl. (II.4.2) mit $c_L^*(5,2)$ bezeichnet ist (siehe Bild II.7).

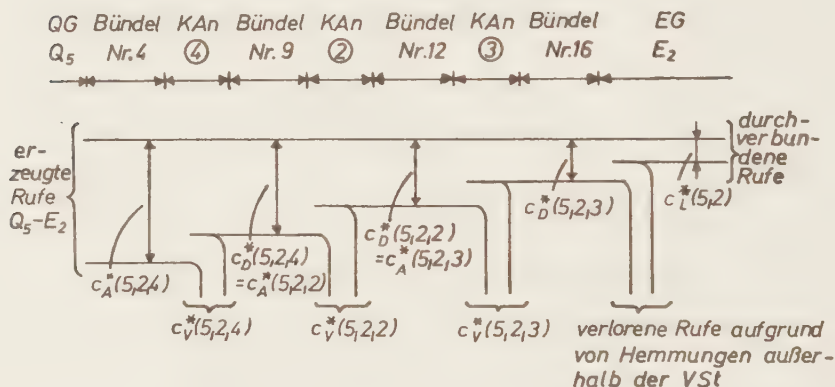


Bild II.7 Graphische Darstellung des Verkehrsflusses Q_5-E_2

Wenn Verlustwahrscheinlichkeiten interessieren, dann kann man sie gemäß Gl. (I.4.4) als Quotient von c-Werten berechnen. Zwei Beispiele mögen genügen. Es sei die KAN Nr. 2 betrachtet. Das erste Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein an dieser KAN ankommender Ruf des Verkehrsstromes Q_5-E_2 hier nicht weiterverbunden werden kann. Diese Wahrscheinlichkeit sei mit $B_V^*(5,2,2)$ bezeichnet (das erste Argument bedeutet die Nummer der QG, das zweite die der EG

und das dritte die der KAN). Es ist

$$B_V^*(5,2,2) = \frac{c_V^*(5,2,2)}{c_A^*(5,2,2)} \quad . \quad (II.4.5a)$$

Mit Gl.(II.4.4) und Tafel II.6 wird hieraus

$$B_V^*(5,2,2) = \frac{\sum_{\omega \in \Omega} [\Lambda_5(x_{B4}) \cdot p_{52} \cdot \mu_g(x_{B9}) \cdot (1 - \mu_{12}(x_{B12})) \cdot P(\omega)]}{\sum_{\omega \in \Omega} [\Lambda_5(x_{B4}) \cdot p_{52} \cdot \mu_g(x_{B9}) \cdot P(\omega)]} \quad . \quad (II.4.5b)$$

Das zweite Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein an der KAN Nr. 2 angekommener und dort durchgeschalteter Ruf des Verkehrsstromes $Q_5 - E_2$ in seinem weiteren Verlauf noch irgendwo blockiert wird. Diese Wahrscheinlichkeit sei mit $B_W^*(5,2,2)$ bezeichnet. Es ist

$$B_W^*(5,2,2) = \frac{c_W^*(5,2,2)}{c_A^*(5,2,2)} \quad . \quad (II.4.6a)$$

Mit Gl.(II.4.4) und Tafel II.6 wird hieraus

$$B_W^*(5,2,2) = \frac{\sum_{\omega \in \Omega} [\Lambda_5(x_{B4}) \cdot p_{52} \cdot \mu_g(x_{B9}) \cdot \mu_{12}(x_{B12}) \cdot (1 - \mu_{16}(x_{B16})) \cdot \mu_{12}(x_{B16}) \cdot P(\omega)]}{\sum_{\omega \in \Omega} [\Lambda_5(x_{B4}) \cdot p_{52} \cdot \mu_g(x_{B9}) \cdot P(\omega)]} \quad . \quad (II.4.6b)$$

II. 4.2 Verkehrsgrößen für die Verkehrsströme von Leitungsbündeln

Die Verkehrsströme in Leitungsbündeln setzen sich aus den elementaren, jeweils von einer QG zu einer EG gehenden Verkehrsströmen zusammen. Bekanntlich ist der Erwartungswert einer Summe von Zufallsvariablen gleich der Summe der Erwartungswerte dieser Zufallsvariablen. Das kann man ausnützen, um z.B. die Verkehrsgrößen von Leitungsbündeln aus den Verkehrsgrößen der elementaren Verkehrsströme auszurechnen.

Damit gilt für die Belastung (= mittlere Anzahl gleichzeitig belegter Leitungen) des Bündels Nr. l :

$$\gamma^*(l) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}_l} \gamma^*(i,j) \quad . \quad (\text{II.4.7})$$

Die mittlere Lastruftrate (= mittlere Zahl von Gesprächsbeginnen pro Zeiteinheit) im Bündel Nr. l ist

$$c_l^*(l) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}_l} c_l^*(i,j) \quad . \quad (\text{II.4.8a})$$

Nun sei

$$c_l^*(l) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}_l} c_l^*(i,j,m) \quad . \quad (\text{II.4.8b})$$

Dann ergeben sich weitere Verkehrsgrößen für das Bündel Nr. l völlig analog zu den in Abschn. II.4.1 definierten Größen, indem man in Gl.(II.4.8b) rechts und links statt "." etwa A, V, D oder W schreibt; m ist die Nummer derjenigen KAn, bei der das Bündel Nr. l Zubringerbündel ist.

Verlustwahrscheinlichkeiten ergeben sich ebenfalls analog zu den in Abschn. II.4.1 definierten Größen. So ergibt sich etwa im Beispiel von Bild II.4 die Verlustwahrscheinlichkeit in der KAN Nr. 3 für den auf Bündel Nr. 12 ankommenden Verkehrsstrom zu

$$B_V^*(12) = \frac{c_V^*(12)}{c_A^*(12)} \quad . \quad (II.4.9)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf des auf Bündel Nr. 12 an der KAN Nr. 3 ankommenden Verkehrsstromes in dieser KAN noch nicht, aber auf seinem weiteren Verlauf abgewiesen wird, ist

$$B_W^*(12) = \frac{c_W^*(12)}{c_A^*(12)} \quad . \quad (II.4.10)$$

Diese Beispiele für Verkehrsgrößen mögen genügen. Es sei lediglich noch eine Bemerkung gemacht: Bei numerischen Rechnungen ist es selbstverständlich nicht notwendig, zuerst die Verkehrsgrößen der elementaren Verkehre auszurechnen und dann entsprechend zu summieren, z.B. über $(i,j) \in \mathcal{M}_l$. Um die Verkehrsgrößen von Bündeln zu errechnen, wird man vielmehr die benötigten Formelausdrücke ineinander einsetzen, vereinfachen und dann die numerischen Rechnungen ausführen.

U.U. sind Gleichzeitigkeitsverteilungen von Interesse, z.B. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Bündel Nr. l genau x Leitungen belegt sind. In anderen Fällen könnte die Wahrscheinlichkeit dafür interessieren, daß eine bestimmte KAN in einem bestimmten Belegungszustand ist. Solche Größen lassen sich sehr einfach berechnen, nämlich durch entsprechende Summationen über $P(\omega)$.

II. 5 Unvollkommene Erreichbarkeit

Für die bisher betrachteten VSt'n wurde vorausgesetzt, daß jede KAN in jeder abgehenden Richtung vollkommene Erreichbarkeit hat. Dabei wurde die Tatsache, daß an einer KAN ein Ruf in ein bestimmtes Richtungsbündel u.U. nicht durchgeschaltet werden kann, durch die Rechteckfunktion $\mu_i(x_{B_i})$ (vergl. Gl.(II.2.5)) beschrieben. Man kann diese Funktion als bedingte Wahrscheinlichkeit dafür auffassen, daß an der betrachteten KAN ein Ruf ins betreffende Bündel durchgeschaltet werden kann unter der Bedingung, daß im Bündel Nr. / gerade x_{B_i} Leitungen belegt sind.

Es sei nun der Fall betrachtet, daß nicht nur KAN'en mit vollkommener Erreichbarkeit vorkommen, sondern auch KAN'en mit unvollkommener Erreichbarkeit, die durch das Modell der Durchlaßwahrscheinlichkeiten - siehe Abschn. I.2 - beschreibbar sind. Dies ist ein Modell für einstufige KAN'en mit unvollkommener Erreichbarkeit. Die μ -Funktionen sind dann nicht mehr die in Gl.(II.2.5) definierten Rechteckfunktionen, sondern $\mu_i(x_{B_i})$ gibt in Abhängigkeit von der Zahl belegter Leitungen die Durchlaßwahrscheinlichkeit derjenigen Mischung an, über die die Rufe ins Bündel Nr. / gehen. Wenn beispielsweise die KAN Nr. 2 von Bild II.4 in den abgehenden Richtungen 1 und 2 unvollkommene Erreichbarkeit, in der abgehenden Richtung 3 aber vollkommene Erreichbarkeit hat, dann bedeuten $\mu_{12}(x_{B_{12}})$ und $\mu_{13}(x_{B_{13}})$ allgemeine Durchlaßwahrscheinlichkeiten von Mischungen, $\mu_{14}(x_{B_{14}})$ dagegen ist eine Rechteckfunktion. Durchlaßwahrscheinlichkeiten genügen der Bedingung

$$\left. \begin{aligned} 0 < \mu_i(x_{B_i}) &\leq 1 && \text{für } 0 \leq x_{B_i} < n_i, \\ \mu_i(x_{B_i}) &= 0 && \text{sonst} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.5.1})$$

In den Abschnitten II.1 bis II.4 wurde nirgends Gebrauch davon gemacht, daß die μ -Funktionen Rechteckfunktionen sind. Vielmehr sind alle Rechnungen dieser Abschnitte auch dann richtig, wenn die μ -Funktionen statt der Gl.(II.2.5) die weniger einschränkende Gl.(II.5.1) erfüllen.

Damit dürfen neben KAN'en mit vollkommener Erreichbarkeit auch KAN'en mit unvollkommener Erreichbarkeit in der VSt vorkommen. Diese müssen jedoch durch das für einstufige KAN'en mit unvollkommener Erreichbarkeit oft verwendete Modell der Durchlaßwahrscheinlichkeiten beschreibbar sein.

III. DIE BETRIEBSBEDINGUNGEN DER KOPPELANORDNUNGEN INNERHALB DER VERMITTLUNGSSTELLE

Vorbemerkung zu Teil III

Im Teil III wird die im Teil II betrachtete Klasse von VSt'n erneut untersucht. Während im Teil II die Zustandsgleichungen gelöst wurden, um Verkehrsgrößen der VSt zu berechnen, ist die Zielsetzung hier, die Betriebsbedingungen der einzelnen KAN'en der VSt zu ermitteln. Unter Betriebsbedingungen einer KAN seien die statistischen Eigenschaften der an der KAN ankommenden Verkehrsströme und der Hemmungen, die auf die von der KAN abgehenden Rufe einwirken, verstanden.

Es zeigt sich folgendes: Wenn man die im Teil II sehr allgemein gefaßten Voraussetzungen über das Teilnehmerverhalten etwas einschränkt, dann sind die Betriebsbedingungen an den einzelnen KAN'en von dem Typ, von dem in Teil II die Betriebsverhältnisse der gesamten VSt waren. Man kann dann die Betriebsbedingungen der KAN'en innerhalb der VSt mittels der noch im einzelnen zu definierenden "Quellfunktionen" und der "Hemmungsfunktionen" beschreiben. Diese Funktionen lassen sich mittels der im Teil II bestimmten Zustandswahrscheinlichkeiten der VSt berechnen.

Die Quellfunktionen beschreiben die statistischen Eigenschaften der an den KAN'en ankommenden Rufe. Diese Funktionen stellen damit gleichzeitig eine mathematische Beschreibung "geglätteter Verkehre" dar. "Geglätteter Verkehr" ist eine in der Fernspreckverkehrstheorie oft verwendete Bezeichnung für Verkehrsströme, die nicht direkt von QG'n kommen, sondern schon eine oder mehrere KAN'en durchlaufen haben. Für mathematische Beschreibungen ge-glätteter Verkehre interessiert man sich seit längerem.

Die Hemmungsfunktionen beschreiben die Blockierungen, die die Rufe "hinter" der KAN, also in ihrem weiteren Verlauf durch die VSt noch erleiden.

Die - durch Hemmungs- und Quellfunktionen beschriebenen - Betriebsverhältnisse für einzelne KAN'en innerhalb der VSt unterscheiden sich von denen des "isolierten Betriebs" (angebotene Zufallsverkehre 1. oder 2. Art und keine Hemmungen für die abgehenden Rufe) prinzipiell. Sie sind wesentlich allgemeiner.

Wie die Verkehrsgrößen für die einzelnen KAN'en, die unter derartigen Betriebsbedingungen arbeiten, berechnet werden können, wird gezeigt.

Zur numerischen Berechnung der Quell- und Hemmungsfunktionen jeder KAN der VSt wird ein Rechenverfahren angegeben, mit dem diese Funktionen schneller als durch Anwendung der allgemeinen Formeln bestimmt werden können. Daraus ergibt sich ein Rechenverfahren, mit dem die wichtigsten Verkehrsgrößen für die VSt wesentlich schneller als mit den im Teil II der Arbeit entwickelten allgemeinen Formeln berechnet werden können. Damit sind wesentlich größere Systeme einer numerischen Rechnung zugänglich, als es bei Verwendung der im Teil II entwickelten allgemeinen Formeln möglich ist.

Die Bedeutung verwendeter Abkürzungen und Formelzeichen ist im Anhang zusammengefaßt.

III. 1 Der stochastische Prozeß in einem rufeliefernden Teil der Vermittlungsstelle

Es sei ein aus Teilnehmern und einer VSt bestehendes Wähl-netz betrachtet, für das das in Abschn. II.1 entwickelte mathematische Modell verwendet werden soll. Der Zustand des Systems ist dann durch den Zufallsvektor X beschrieben (siehe Gl.(II.2.1)). Der Prozeß $X(t)$ ist ein multi-dimensionaler Geburts- und Todesprozeß.

Die Leitungsbündel der VSt sind die Transportwege für Rufe, die während des Verbindungsaufbaues von den QG'n kommend zu den EG'n wandern. Jedes Leitungsbündel stellt also einen Verbindungsweg zwischen einem "rufeliefernden" (anrufenden) Teil des Systems und einem "mit Rufen belie-ferten"(angerufenen) Teil dar. Der angerufene Teil stellt dann jeweils eine komplexe EG für den anrufenden Teil dar.

Um etwas über die statistischen Eigenschaften solcher EG'n zu erfahren, wird der das Verkehrsgeschehen im rufenden Teil beschreibende Prozeß untersucht. Es ist dann zu er-warten, daß Parameter auftreten, die die Eigenschaften der komplexen EG beschreiben. Die Beschreibung dieses Prozesses geschieht in Abschn. III.1, das Aufsuchen der Parameter in Abschn. III.3.

III. 1.1 Der stochastische Prozeß in "Teil 1"

Entsprechend den Voraussetzungen von Abschn. II.1 hat die VSt eine Fächerstruktur. Schneidet man in Gedanken ein be-liebiges Leitungsbündel durch, dann zerfällt das System wegen seiner fächerförmigen Struktur in zwei Teile. Den einen kann man als "rufeliefernd" (Teil 1), den andern als "angerufen" (Teil 2) auffassen. Bild III.1 zeigt hierfür ein Beispiel. Die Bündel sind (vergl. Abschn. II.2.1) irgendwie numeriert. $\mathcal{K}$ ist die Menge all dieser Nummern. Die Zahl der QG'n ist gleich s und die Zahl der EG'n gleich r . L sei die Nummer des gedanklich durchschnittenen Bündels.

Interessiert man sich nur für das Verkehrsgeschehen im Teil 1,

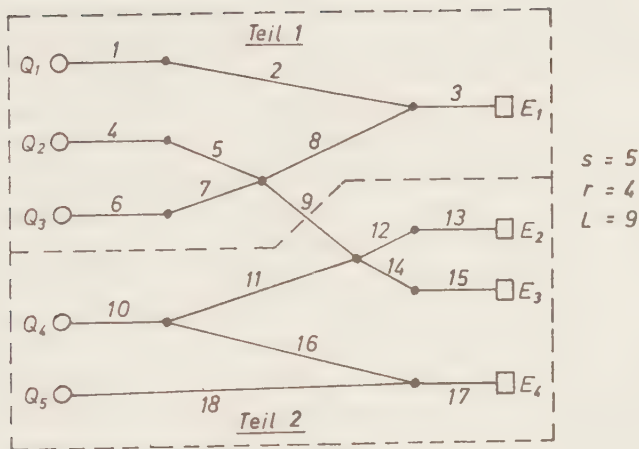


Bild III.1 Zweiteilung des Modells

dann hat man den zeitlichen Verlauf eines Zufallsvektors χ_1 zu betrachten, der den Zustand des Teils 1 in einer Weise beschreibt, die analog zur Beschreibung des Zustands des Gesamtsystems durch χ ist. Man verwendet also als Komponenten von χ_1 die Zahlen gleichzeitig bestehender Verbindungen zwischen den QG'n und den EG'n des Teils 1. Dabei tritt zu den in Teil 1 ursprünglich enthaltenen EG'n der gesamte Teil 2 als (komplexe) EG hinzu: Er spielt die Rolle einer EG, die mit E_0 bezeichnet sei. Das also zu betrachtende Ersatz-System ist in Bild III.2 dargestellt.

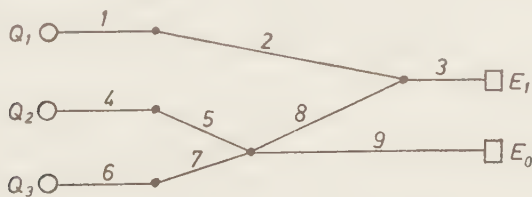


Bild III.2 Ersatz-System für Teil 1 von Bild III.1

Die Komponenten von $\mathcal{X}_1$ lassen sich durch diejenigen von $\mathcal{X}$ ausdrücken. Um dies in übersichtlicher Form tun zu können, seien zunächst einige weitere Indexmengen eingeführt. Es sei $\mathcal{M}'$ die Menge der Indexpaare all derjenigen Komponenten von $\mathcal{X}$, die Verbindungen zwischen QG'n und EG'n des Teils 1 entsprechen ("ganz im Teil 1 verlaufende Wege"). Im Beispiel von Bild III.1 ist $\mathcal{M}' = \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$. $\mathcal{M}''$ sei die zu $\mathcal{M}'$ analoge Indexmenge für alle "ganz im Teil 2 verlaufenden Wege". Im Beispiel von Bild III.1 ist also $\mathcal{M}'' = \{(4,2), (4,3), (4,4), (5,4)\}$. Es sei weiter $\mathcal{I}_Q$ die Menge der Nummern all derjenigen QG'n des Teils 1, die den Teil 2 anrufen können, also zu den Rufen im gedanklich durchschnittenen Bündel Nr. L beitragen können. Im Beispiel von Bild III.1 ist $\mathcal{I}_Q = \{2, 3\}$. Es sei analog dazu $\mathcal{I}_E$ die Menge der Nummern all derjenigen EG'n, an denen ein Ruf aus Teil 1, also über das gedanklich durchschnittenene Bündel Nr. L ankommen kann. Im Beispiel von Bild III.1 ist $\mathcal{I}_E = \{2, 3\}$. Schließlich wird noch eine Menge benötigt, die die Indexpaare all derjenigen Komponenten von $\mathcal{X}$ enthält, die zu Belegungen im Bündel Nr. L beitragen können. Dies ist die in Abschn. II.2.1 definierte Menge $\mathcal{M}_L$ mit $L=L$, also $\mathcal{M}_L$. Im Beispiel von Bild III.1 ist

$$\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_9 = \{ (2,2), (2,3), (3,2), (3,3) \} .$$

Nach Einführung dieser Indexmengen ist es nicht schwer, die Komponenten des Zufallsvektors $\mathcal{X}_1$, der den Zustand des Teils 1 beschreibt, anzugeben. Erstens gehören dazu die Zahlen gleichzeitig bestehender Gespräche zwischen QG'n des Teils 1 und den ursprünglichen EG'n des Teils 1. Sie seien mit X_{ij} , $(i,j) \in \mathcal{M}'$ bezeichnet. Zweitens gehören dazu die Zahlen gleichzeitig bestehender Gespräche zwischen QG'n des Teils 1 und der EG E_0 , die den Teil 2 repräsentiert. Diese seien mit X_{i0} , $i \in \mathcal{I}_Q$ bezeichnet. Es gilt

$$X_{ij} = X_{ij} \quad , \quad (i,j) \in \mathcal{M}' . \quad (\text{III.1.1a})$$

$$X_{i0} = \overline{\sum_{j \in \mathcal{I}_E} X_{ij}} \quad , \quad i \in \mathcal{I}_Q . \quad (\text{III.1.1b})$$

Dabei sind die X_{ij} die Komponenten von $\mathcal{X}$. Es ist also

$$\mathcal{X}_1 = (X_{1ij}, (i,j) \in \mathcal{M}'; X_{1io}, i \in \mathcal{I}_Q) . \quad (\text{III.1.2})$$

Im Beispiel von Bild III.2 ist:

$$\mathcal{X}_1 = (X_{111}, X_{121}, X_{131}, X_{120}, X_{130})$$

$$X_{111} = X_{11}$$

$$X_{121} = X_{21}$$

$$X_{131} = X_{31}$$

$$X_{120} = X_{22} + X_{23}$$

$$X_{130} = X_{32} + X_{33}$$

Der Zustandsraum von $\mathcal{X}_1$ sei Ω_1 , und es sei ω_1 ein Punkt von Ω_1 :

$$\omega_1 = (x_{1ij}, (i,j) \in \mathcal{M}'; x_{1io}, i \in \mathcal{I}_Q) . \quad (\text{III.1.3})$$

Gemäß Gl.(III.1.1a,b) gilt für die Komponenten von ω_1 , falls die VSt im Zustand ω ist

$$x_{1ij} = x_{ij} , \quad (i,j) \in \mathcal{M}' . \quad (\text{III.1.4a})$$

$$x_{1io} = \overline{\sum_{j \in \mathcal{I}_E} x_{ij}} , \quad i \in \mathcal{I}_Q . \quad (\text{III.1.4b})$$

Ω_1 ist dadurch gekennzeichnet, daß erstens keine Komponente von $\mathcal{X}_1$ negativ werden kann und zweitens die Zahl belegter Leitungen in keinem Bündel des Teils 1 größer als die Leitungszahl werden kann.

Da sich die Komponenten von $\mathcal{X}$ zufällig ändern, ändern sich die Komponenten von $\mathcal{X}_1$ aufgrund der Gleichungen (III.1.1a,b) ebenfalls zufällig. $\mathcal{X}_1(t)$ ist der stochastische Prozeß, der das Verkehrsgeschehen im Teil 1 beschreibt.

III. 1.2 Zustandsgleichungen für den Teil 1

Die Wahrscheinlichkeit, den Teil 1 im Zustand ω_1 vorzufinden, sei mit $P_1(\omega_1)$ bezeichnet:

$$P_1(\omega_1) = W(\chi_1 = \omega_1) \quad . \quad (III.1.5)$$

Man kann diese Wahrscheinlichkeit aus $P(\omega)$, der Wahrscheinlichkeit, das Gesamtsystem im Zustand ω vorzufinden, berechnen. Es sei $\mathcal{A}(\omega_1)$ die Menge derjenigen Zustände ω , die den Zustand ω_1 im Teil 1 nach sich ziehen. Dann ist

$$P_1(\omega_1) = \sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)} P(\omega) \quad . \quad (III.1.6)$$

Die hier auftretende Summierung sei nun auf die Zustandsgleichungen von χ angewendet. Es werden dazu all diejenigen Gleichungen des Gleichungssystems (II.2.14) addiert, die zu einem $\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)$ gehören:

$$0 = \sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} [\phi_{ij}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega_{ij}^-) - (\theta_{ij}(\omega) + \phi_{ij}(\omega)) \cdot P(\omega) + \theta_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P(\omega_{ij}^+)] , \quad \omega_1 \in \Omega_1 .$$

(III.1.7)

Nun seien (analog zu ω_{ij}^+ , ω_{ij}^- ; s. Gl.(II.2.4a,b))

ω_{ij}^+ , ω_{ij}^- die zu ω_1 bezüglich der i,j-ten Komponente nach unten bzw. nach oben benachbarte Punkte:

$$\omega_{ij}^+ = (\dots, x_{ij} + 1, \dots) , \quad (III.1.8)$$

$$\omega_{ij}^- = (\dots, x_{ij} - 1, \dots) . \quad (III.1.9)$$

Ferner denke man sich analog zu Teil II Ω_1 formal zu Ω_{1e} erweitert.

Durch Umformen kann man Gl.(III.1.7) auf die in Gl.(III.1.10) angegebene Form bringen. Diese Rechnung ist im einzelnen in "A1 Anhang zu Abschn. III.1.2" aufgeführt. Es ergibt sich:

$$0 = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} \left[\phi_{1ij}(\omega_{1ij}^-) \cdot P_1(\omega_{1ij}^-) - \Theta_{1ij}(\omega_1) + \phi_{1ij}(\omega_1) \cdot P_1(\omega_1) + \Theta_{1ij}(\omega_{1ij}^+) \cdot P_1(\omega_{1ij}^+) \right] \\ + \sum_{i \in \mathcal{I}_Q} \left[\phi_{1io}(\omega_{1io}^-) \cdot P_1(\omega_{1io}^-) - \Theta_{1io}(\omega_1) + \phi_{1io}(\omega_1) \cdot P_1(\omega_1) + \Theta_{1io}(\omega_{1io}^+) \cdot P_1(\omega_{1io}^+) \right], \quad \omega_1 \in \Omega_1. \quad (\text{III.1.10})$$

Dabei ist $\phi_{1ij}(\omega_1)$ (siehe Gl.(III.1.31) bzw. (III.1.34) in "A1 Anhang zu Abschn. III.1.2") folgende Abkürzung:

$$\phi_{1ij}(\omega_1) = p_{ij} \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\| \zeta_l(x_{1Bl}(\omega_1)) \cdot b_{1ij}(\omega_1) \right], \quad (i,j) \in \mathcal{M}^1, \quad \omega_1 \in \Omega_{1e}. \quad (\text{III.1.11a})$$

$$\phi_{1io}(\omega_1) = \frac{\sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \phi_{1ij}(\omega) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)} P(\omega)}, \quad \omega_1 \in \Omega_1, \\ = 0, \quad \omega_1 \notin \Omega_1, \quad \left. \vphantom{\frac{\sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \phi_{1ij}(\omega) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)} P(\omega)}}} \right\} i \in \mathcal{I}_Q. \quad (\text{III.1.11b})$$

$x_{1Bl}(\omega_1)$ ist hierin die Zahl belegter Leitungen im Bündel Nr. l , wenn der Teil 1 im Zustand ω_1 ist. $b_{1ij}(\omega_1)$ ist eine Hilfsfunktion. Sie stellt sicher, daß die Gleichung (III.1.11a) und die spätere Gl.(III.1.12a) auch für Zahlen-tupel $\omega_1 \in \Omega_{1K}$ richtig sind. Dabei ist Ω_{1K} das Komplement von Ω_1 bezüglich Ω_{1e} , d.h. $\Omega_{1K} = \Omega_{1e} - \Omega_1$. Für $b_{1ij}(\omega_1)$ gilt (siehe Gl.III.1.30) in "A1 Anhang zu Abschnitt III.1.2"):

$$b_{ij}(\omega_i) = \begin{cases} 0 & \text{für solche Zahlentupel } \omega_i, \text{ bei} \\ & \text{denen} \\ & \text{entweder der Ausdruck } p_{ij} \left[\frac{1}{\prod_{l \in \mathcal{M}_{ij}} \zeta_l(x_{\omega_l}(\omega_i))} \right] \\ & \text{gleich Null ist} \\ & \text{oder wenigstens eine Komponente} \\ & \text{von } \omega_i \text{ negativen Wert hat,} \\ \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} (i,j) \in \mathcal{M}' \quad (\text{III.1.11c})$$

Anmerkung: Die Funktion $b_{ij}(\omega_i)$ ist zu der in Gl.(II.2.11a bzw. b) definierten Funktion analog. Ihr Auftreten an dieser Stelle deutet bereits auf eine gewisse Analogie der Prozesse $\chi_i(t)$ und $\chi(t)$ hin.

$\Theta_{ij}(\omega_i)$ in Gl.(III.1.10) ist (siehe Gl.(III.1.32) bzw. (III.1.35) in "A1 Anhang zu Abschn. III.1.2") wie folgt definiert:

$$\Theta_{ij}(\omega_i) = \varepsilon_{ij} \cdot x_{ij} \cdot b_{ij}(\omega_{ij}^-), \quad (i,j) \in \mathcal{M}', \quad \omega_i \in \Omega_{1e}. \quad (\text{III.1.12a})$$

$$\Theta_{110}(\omega_i) = \left. \begin{aligned} & \frac{\sum_{\omega \in \alpha(\omega_i)} \left[\sum_{j \in \mathcal{J}_E} \Theta_{ij}(\omega) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \alpha(\omega_i)} P(\omega)}, \quad \omega_i \in \Omega_1, \\ & = 0, \quad \omega_i \notin \Omega_1, \end{aligned} \right\} i \in \mathcal{J}_Q. \quad (\text{III.1.12b})$$

Mit $\mathcal{M}_{T1}$ sei folgende Menge bezeichnet:

$$\mathcal{M}_{T1} = \mathcal{M}' \cup \{(i,0), i \in \mathcal{J}_Q\}. \quad (\text{III.1.13})$$

$\mathcal{M}_{T1}$ ist die Menge der Nummernpaare all derjenigen Paare von QG'n und EG'n, zwischen denen im Teil 1 Verbindungen möglich sind. Dabei wird der gesamte Teil 2 als eine einzige EG betrachtet, die die Nummer Null hat.

Im Beispiel von Bild III.2 ist

$$\mathcal{M}_{T_1} = \{ (1,1), (2,1), (3,1), (2,0), (3,0) \} .$$

Damit kann man den in Gl.(III.1.2) definierten Zufallsvektor χ_1 so schreiben:

$$\chi_1 = (X_{ij}, (i,j) \in \mathcal{M}_{T_1}) . \quad (\text{III.1.14})$$

Damit kann man Gl.(III.1.10) auf folgende Form bringen:

$$0 = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}_{T_1}} \left[\phi_{ij}(\omega_{ij}^-) \cdot P_i(\omega_{ij}^-) - (\theta_{ij}(\omega_1) + \phi_{ij}(\omega_1)) \cdot P_i(\omega_1) + \theta_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P_i(\omega_{ij}^+) \right], \quad \omega_1 \in \Omega_1 . \quad (\text{III.1.15})$$

Aus Gl.(II.2.15) ergibt sich mit Gl.(III.1.6):

$$\sum_{\omega_1 \in \Omega_1} P_i(\omega_1) = 1 . \quad (\text{III.1.16})$$

Man vergleiche Gl.(III.1.14) mit Gl.(II.2.1), (III.1.15) mit (II.2.14) und (III.1.16) mit (II.2.15). Man sieht, daß für die Zustandswahrscheinlichkeiten $P_i(\omega_1)$ des Prozesses $\chi_1(t)$ ein Gleichungssystem existiert (nämlich Gl.(III.1.15) zusammen mit (III.1.16)), das dem Typ nach dasjenige eines Geburts- und Todesprozesses ist. $\phi_{ij}(\omega_1)$ und $\theta_{ij}(\omega_1)$ kann man als Geburts- bzw. Sterbekoeffizienten auffassen.

Damit kann man $P_i(\omega_1)$ außer über Gl.(III.1.6) auch noch so bestimmen, daß man zunächst mittels Gl.(III.1.11a,b) und (III.1.12a,b) die Koeffizienten des Gleichungssystems (III.1.15) bestimmt und dann dessen Lösung sucht. Obwohl diese zweite Möglichkeit zunächst umständlich erscheint, gibt es in den nächsten Kapiteln dafür wichtige Anwendungen.

III. 2 Der stochastische Prozeß in einem angerufenen Teil der Vermittlungsstelle

Während in Abschnitt III.1 der stochastische Prozeß $\chi_1(t)$ untersucht wird, der den rufeliefernden Teil beschreibt, wird hier nur derjenige stochastische Prozeß $\chi_2(t)$ betrachtet, der das Verkehrsgeschehen im "mit Rufen belieferten" Teil des Systems beschreibt. Der rufeliefernde Teil stellt eine komplexe QG dar, und es ist zu erwarten, daß Parameter auftreten, die die komplexe QG beschreiben. $\chi_2(t)$ wird hier in Abschn. III.2 beschrieben, während das Aufsuchen der Parameter für die komplexe QG in Abschn. III.4 geschieht.

III. 2.1 Der stochastische Prozeß in "Teil 2"

Wie in Abschn. III.1.1 wird wieder in Gedanken ein Leitungsbündel durchgeschnitten. Es habe die Nummer 1. Das System zerfällt in zwei Teile. Der angerufene Teil wird betrachtet.

Interessiert man sich nur für das Verkehrsgeschehen in Teil 2, dann hat man einen zufälligen Vektor χ_2 zu betrachten, der den Zustand des Teils 2 - analog zur Beschreibung des Gesamtsystems durch χ - beschreibt. Die Komponenten von χ_2 sind die Zahlen gleichzeitig bestehender Verbindungen zwischen den QG'n des Teils 2 und den EG'n des Teils 2. Dabei kommt zu den ursprünglich im Teil 2 enthaltenen QG'n noch der gesamte Teil 1 als komplexe QG hinzu. Der Teil 1 spielt also die Rolle einer QG. Sie sei mit Q_0 bezeichnet. Das zu betrachtende Ersatzsystem ist für das Beispiel von Bild III.1 in Bild III.3 dargestellt.

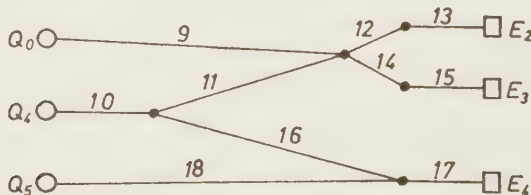


Bild III.3 Ersatz-System für Teil 2 von Bild III.1

Zu den Komponenten von $\mathcal{X}_2$ zählen zunächst einmal die Zahlen gleichzeitig bestehender Gespräche zwischen den ursprünglichen QG'n und den EG'n des Teils 2. Sie seien mit X_{2ij} , $(i,j) \in \mathcal{M}''$ bezeichnet (betriffts $\mathcal{M}''$ siehe Abschn. III.1.1). Außerdem gehören dazu die Zahlen gleichzeitig bestehender Gespräche zwischen der QG Q_0 und den EG'n des Teils 2. Diese Zahlen seien mit X_{20j} , $j \in \mathcal{J}_E$ bezeichnet (betriffts $\mathcal{J}_E$ siehe Abschn. III.1.1). Es gilt

$$X_{2ij} = X_{ij} \quad , \quad (i,j) \in \mathcal{M}'' \quad . \quad (\text{III.2.1a})$$

$$X_{20j} = \overline{\sum_{i \in \mathcal{J}_Q} X_{ij}} \quad , \quad j \in \mathcal{J}_E \quad . \quad (\text{III.2.1b})$$

Die X_{ij} hierin sind die Komponenten von $\mathcal{X}$. Es ist also

$$\mathcal{X}_2 = (X_{2ij}, (i,j) \in \mathcal{M}''; X_{20j}, j \in \mathcal{J}_E) \quad . \quad (\text{III.2.2})$$

Im Beispiel von Bild III.3 ist:

$$\mathcal{X}_2 = (X_{242}, X_{243}, X_{244}, X_{254}, X_{202}, X_{203})$$

$$X_{242} = X_{42}$$

$$X_{243} = X_{43}$$

$$X_{244} = X_{44}$$

$$X_{254} = X_{54}$$

$$X_{202} = X_{22} + X_{32}$$

$$X_{203} = X_{23} + X_{33}$$

Der Zustandsraum von χ_2 sei Ω_2 genannt, und ω_2 sei ein Punkt von Ω_2 :

$$\omega_2 = (x_{2ij}, (i,j) \in \mathcal{M}^n; x_{2oj}, j \in \mathcal{J}_E) . \quad (\text{III.2.3})$$

Gemäß Gl.(III.2.1a,b) gilt für die Komponenten von ω_2 , falls die VSt im Zustand ω ist

$$x_{2ij} = x_{ij} , \quad (i,j) \in \mathcal{M}^n . \quad (\text{III.2.4a})$$

$$x_{2oj} = \overline{\sum_{i \in \mathcal{J}_a} x_{ij}} , \quad j \in \mathcal{J}_E . \quad (\text{III.2.4b})$$

Ω_2 ist dadurch gekennzeichnet, daß keine Komponente von χ_2 negativ werden kann, und in keinem Bündel des Teils 2 die Zahl belegter Leitungen größer als die Leitungszahl des betreffenden Bündels sein kann.

Die Komponenten von χ_2 (siehe Gl.(III.2.1a,b)) ändern sich zufällig. $\chi_2(t)$ ist der stochastische Prozeß, der das Verkehrsgeschehen im Teil 2 beschreibt.

III. 2.2 Zustandsgleichungen für den Teil 2

Die Wahrscheinlichkeit, den Teil 2 im Zustand ω_2 vorzufinden, sei mit $P_2(\omega_2)$ bezeichnet:

$$P_2(\omega_2) = W(\chi_2 = \omega_2) . \quad (\text{III.2.5})$$

Man kann $P_2(\omega_2)$ aus $P(\omega)$ berechnen. Es sei $\mathcal{L}(\omega_2)$ die Menge derjenigen Zustände ω , die den Zustand ω_2 im Teil 2 nach sich ziehen. Damit ist

$$P_2(\omega_2) = \overline{\sum_{\omega \in \mathcal{L}(\omega_2)} P(\omega)} , \quad (\text{III.2.6})$$

Wie in Abschn. III.1.2 werden nun alle Gleichungen des Gleichungssystems (II.2.14) addiert, die zu einem $\omega \in \mathcal{X}(\omega_2)$ gehören:

$$0 = \sum_{\omega \in \mathcal{X}(\omega_2)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} \left[\phi_{ij}^-(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega_{ij}^-) - (\theta_{ij}(\omega) + \phi_{ij}^-(\omega)) \cdot P(\omega) + \theta_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P(\omega_{ij}^+) \right], \quad \omega_2 \in \Omega_2. \quad (\text{III.2.7})$$

Nun seien (analog zu den Gleichungen (III.1.8), (III.1.9)) ω_{2ij}^+ , ω_{2ij}^- die zu ω_2 bezüglich der i, j-ten Komponente benachbarten Punkte:

$$\omega_{2ij}^+ = (\dots, x_{2ij} + 1, \dots) \quad , \quad (\text{III.2.8})$$

$$\omega_{2ij}^- = (\dots, x_{2ij} - 1, \dots) \quad . \quad (\text{III.2.9})$$

Ferner hat man sich Ω_2 formal zu Ω_{2e} erweitert zu denken. Gl.(III.2.7) kann man auf folgende Form bringen:

$$0 = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} \left[\phi_{2ij}^-(\omega_{2ij}^-) \cdot P_2(\omega_{2ij}^-) - (\theta_{2ij}(\omega_2) + \phi_{2ij}^-(\omega_2)) \cdot P_2(\omega_2) + \theta_{2ij}(\omega_{2ij}^+) \cdot P_2(\omega_{2ij}^+) \right] \\ + \sum_{j \in \mathcal{I}_E} \left[\phi_{2oj}^-(\omega_{2oj}^-) \cdot P_2(\omega_{2oj}^-) - (\theta_{2oj}(\omega_2) + \phi_{2oj}^-(\omega_2)) \cdot P_2(\omega_2) + \theta_{2oj}(\omega_{2oj}^+) \cdot P_2(\omega_{2oj}^+) \right], \quad \omega_2 \in \Omega_2. \quad (\text{III.2.10})$$

Die Umformung der Gl.(III.2.7) auf die Form von Gl.(III.2.10) verläuft wie die Umrechnung von Gl.(III.1.7) zu Gl.(III.1.10).

Man hat lediglich sinngemäß eine Indexvertauschung vorzunehmen, die dem Austausch von Teil 2 gegen Teil 1 entspricht. Diese Rechnung braucht daher nicht ausgeführt zu werden. In Gl.(III.2.10) sind folgende Abkürzungen verwendet:

$$\phi_{2ij}(\omega_2) = p_{ij} \left[\frac{l \in \mathcal{T}_{ij}}{\prod} \zeta_l(x_{2B_l}(\omega_2)) \right] \cdot b_{2ij}(\omega_2), \quad (i,j) \in \mathcal{M}^n, \quad \omega_2 \in \Omega_{2e}. \quad (\text{III.2.11a})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{20j}(\omega_2) &= \frac{\sum_{\omega \in \mathcal{S}(\omega_2)} \left[\sum_{i \in \mathcal{T}_a} \phi_{ij}(\omega) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \mathcal{S}(\omega_2)} P(\omega)}, \quad \omega_2 \in \Omega_2, \\ &= 0, \quad \omega_2 \notin \Omega_2, \end{aligned} \right\} j \in \mathcal{T}_E. \quad (\text{III.2.11b})$$

$x_{2B_l}(\omega_2)$ ist die Zahl belegter Leitungen im Bündel Nr. l , wenn der Teil 2 im Zustand ω_2 ist. $b_{2ij}(\omega_2)$ ist folgende Hilfsfunktion:

$$\left. \begin{aligned} b_{2ij}(\omega_2) &= 0 \quad \text{für solche Zählentupel } \omega_2, \text{ bei} \\ &\quad \text{denen} \\ &\quad \text{entweder der Ausdruck } p_{ij} \left[\frac{l \in \mathcal{T}_{ij}}{\prod} \zeta_l(x_{2B_l}(\omega_2)) \right] \\ &\quad \text{gleich Null ist} \\ &\quad \text{oder wenigstens eine Komponente von} \\ &\quad \omega_2 \text{ negativen Wert hat,} \\ &= 1 \quad \text{sonst,} \end{aligned} \right\} (i,j) \in \mathcal{M}^n. \quad (\text{III.2.11c})$$

Die Hilfsfunktion stellt sicher, daß die Gl. (III.2.11a) und die spätere Gl.(III.2.12a) auch für Zählentupel $\omega_2 \in \Omega_{2K}$ richtig sind. Dabei ist Ω_{2K} das Komplement von Ω_2 bezüglich Ω_{2e} , d.h. $\Omega_{2K} = \Omega_{2e} - \Omega_2$. Man vergleiche die Anmerkung hinter Gl.(III.1.11c)! Für $\phi_{2ij}(\omega_2)$ in Gl.(III.2.10) gilt:

$$\Theta_{2ij}(\omega_2) = \varepsilon_{ij} \cdot x_{2ij} \cdot b_{2ij}(\omega_{2ij}^-), \quad (i,j) \in \mathcal{M}^n, \quad \omega_2 \in \Omega_{2e}. \quad (\text{III.2.12a})$$

$$\Theta_{20j}(\omega_2) = \frac{\sum_{\omega \in \mathcal{B}(\omega_2)} \left[\sum_{i \in \mathcal{I}_E} \Theta_{ij}(\omega) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \mathcal{B}(\omega_2)} P(\omega)}, \quad \omega_2 \in \Omega_2, \quad \left. \vphantom{\frac{\sum_{\omega \in \mathcal{B}(\omega_2)} \left[\sum_{i \in \mathcal{I}_E} \Theta_{ij}(\omega) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \mathcal{B}(\omega_2)} P(\omega)}}} \right\} j \in \mathcal{I}_E. \quad (\text{III.2.12b})$$

$$= 0, \quad \omega_2 \notin \Omega_2,$$

Es sei mit $\mathcal{M}_{T_2}$ folgende Menge bezeichnet:

$$\mathcal{M}_{T_2} = \mathcal{M}^n \cup \{(0,j), j \in \mathcal{I}_E\}. \quad (\text{III.2.13})$$

Dies ist die Menge der Nummernpaare all derjenigen Paare von QG'n und EG'n, zwischen denen im Teil 2 Verbindungen möglich sind. Dabei wird der gesamte Teil 1 des Systems als eine QG betrachtet, die die Nummer Null hat. Im Beispiel von Bild III.3 ist

$$\mathcal{M}_{T_2} = \{(4,2), (4,3), (4,4), (5,4), (0,2), (0,3)\}.$$

Damit kann man den in Gl.(III.2.2) definierten Zufallsvektor χ_2 so schreiben:

$$\chi_2 = (x_{2ij}, (i,j) \in \mathcal{M}_{T_2}), \quad (\text{III.2.14})$$

und Gl.(III.2.10) geht über in:

$$0 = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}_{12}} [\phi_{2ij}(\omega_{2ij}^-) \cdot P_2(\omega_{2ij}^-) - (\theta_{2ij}(\omega_2) + \phi_{2ij}(\omega_2) \cdot P_2(\omega_2) + \theta_{2ij}(\omega_{2ij}^+) \cdot P_2(\omega_{2ij}^+))], \quad \omega_2 \in \Omega_2. \quad (\text{III.2.15})$$

Aus Gl.(II.2.15) ergibt sich mit Gl.(III.2.6):

$$\sum_{\omega_2 \in \Omega_2} P_2(\omega_2) = 1. \quad (\text{III.2.16})$$

Man vergleiche Gl.(III.2.14) mit Gl.(II.2.1), (III.2.15) mit (II.2.14) und (III.2.16) mit (II.2.15). Dann sieht man, daß - analog zu Abschn. III.1.2 - die Gl.'en (III.2.15) und (III.2.16) das Zustandsgleichungssystem des Prozesses $\mathcal{X}_2(t)$ bilden. Der Typ dieses Gleichungssystems ist der eines Geburts- und Todesprozesses.

Damit kann man $P_2(\omega_2)$ außer gemäß Gl.(III.2.6) auch noch so bestimmen, daß man zunächst die Koeffizienten $\phi_{2ij}(\omega_2)$ und $\theta_{2ij}(\omega_2)$ des Gleichungssystems (III.2.15) mittels der Gl.'n (III.2.11a,b) und (III.2.12a,b) bestimmt und dann dessen Lösung sucht. Für diese zweite Möglichkeit gibt es in den nächsten Abschnitten wichtige Anwendungsfälle.

III. 3 Die Hemmungsfunktion

Im Abschn. III.1 wurde der Prozeß $\mathcal{X}_1(t)$, der das Verkehrsgeschehen im Teil 1 beschreibt, betrachtet. Es zeigte sich, daß seine Zustandsgleichungen dem Typ nach die eines Geburts- und Todesprozesses sind. $\mathcal{X}_1(t)$ kann hier also wie ein Geburts- und Todesprozeß behandelt werden. Hier in Abschn. III.3 wird nun gezeigt, daß darüberhinaus unter gewissen Voraussetzungen die Geburts- und Sterbekoeffizienten von $\mathcal{X}_1(t)$ genauso wie die von $\mathcal{X}(t)$ aufgebaut sind. Es tritt dann eine Funktion auf (Hemmungsfunktion), die als ersatzweise Beschreibung der durch Teil 2 gebildeten komplexen EG gedeutet werden kann.

III. 3.1. Einschränkende Voraussetzungen

Vergleicht man Gl.(III.1.11a) mit Gl.(II.2.12) und Gl.(III.1.12a) mit Gl.(II.2.13), dann sieht man, daß die Geburts- und Sterbekoeffizienten von $\mathcal{X}_1(t)$ im Fall $(i,j) \in \mathcal{M}^1$ genauso aufgebaut sind wie die von $\mathcal{X}(t)$. Diese Geburts- und Sterbekoeffizienten betreffen diejenigen Komponenten von $\mathcal{X}_1$, die zu "nicht ins durchschnittene Bündel" führenden Wegen gehören. Die Geburts- und Sterbekoeffizienten der Komponenten $\mathcal{X}_{1i_0}$, $i \in \mathcal{I}_d$ (siehe Gl.(III.1.11b) und (III.1.12b)) sind dagegen komplizierter aufgebaut als Gl.(II.2.12) bzw. (II.2.13). Diese Geburts- und Sterbekoeffizienten betreffen diejenigen Komponenten von $\mathcal{X}_1$, die zu den "ins durchschnittene Bündel" führenden Wegen gehören. Sie gehören also zu Wegen, die zur EG E_0 führen; vergl. die Beispiele von Bild III.1 und III.2.

Macht man nun die zwei im folgenden genannten Voraussetzungen, dann vereinfachen sich $\phi_{1i_0}(\omega_1)$ und $\theta_{1i_0}(\omega_1)$, jeweils $i \in \mathcal{I}_d$, wesentlich. Ihr Aufbau entspricht dann dem von Gl.(II.2.12) bzw. (II.2.13). Die Voraussetzungen lauten:

Voraus. 1: Der Quotient $\rho_{ij} / \sum_{k \in \mathcal{I}_E} \rho_{ik}$

habe für alle $i \in \mathcal{I}_d$ denselben Wert;
dieser Wert sei ρ_{0j} , $j \in \mathcal{I}_E$. Es soll
also gelten:

$$\frac{p_{ij}}{\sum_{k \in \mathcal{I}_E} p_{ik}} = p_{0j}, \quad i \in \mathcal{I}_Q, j \in \mathcal{I}_E. \quad (\text{III.3.1})$$

Vorausss. 2: Die mittleren Enderaten $\epsilon_{ij}, (i, j) \in \mathcal{M}_L$ sollen jeweils für alle $j \in \mathcal{I}_E$ denselben Wert haben; er sei $\epsilon_{i0}, i \in \mathcal{I}_Q$. Es soll also gelten:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{i0}, \quad i \in \mathcal{I}_Q, j \in \mathcal{I}_E. \quad (\text{III.3.2})$$

Die beiden Voraussetzungen können anschaulich gedeutet werden:

Deutung von Voraussetzung 1: Der Quotient in Gl.(III.3.1) ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß ein von der QG Q_i erzeugter Ruf zur EG E_j ($j \in \mathcal{I}_E$!) zielt unter der Bedingung, daß er zu irgendeiner EG des Teils 2 zielt. Voraussetzung (III.3.1) besagt damit, daß alle Rufe, die im Verbindungsbündel Nr. L ankommen, im Teil 2 mit derselben Wahrscheinlichkeit, nämlich p_{0j} zur EG E_j zielen. Mit anderen Worten: Die von Teil 1 zum Teil 2 gehenden Rufe haben unabhängig davon, aus welcher QG des Teils 1 sie stammen, im Teil 2 dieselben statistischen Richtungswünsche.

Deutung von Voraussetzung 2: ϵ_{ij} in Gl.(III.3.2) ist die mittlere Enderate eines zwischen der QG Q_i und der EG E_j bestehenden Gespräches. Die Voraussetzung 2 besagt, daß die mittlere Dauer von Gesprächen, die von QG'n des Teils 1 zu EG'n des Teils 2 gehen, nicht davon abhängt, zu welcher EG des Teils 2 sie gehen. Vielmehr darf die mittlere Dauer nur davon abhängen, aus welcher QG der Ruf stammt.

Die Voraussetzungen 1 und 2 bedeuten damit eine gewisse Vereinheitlichung der Eigenschaften solcher Rufe, die über das Verbindungsbündel Nr. L im Teil 2 ankommen. Die Auswirkung auf die Form der Geburts- und Sterbekoeffizienten der Komponenten $X_{i0}, i \in \mathcal{I}_Q$ des Prozesses $X_i(t)$ wird im nächsten Abschnitt untersucht.

III. 3.2 Die neue Form der Geburts- und Sterbekoeffizienten

Die Folge der einschränkenden Voraussetzungen ist eine wesentliche Vereinfachung der Gl.'en (III.1.11b) und (III.1.12b), also der Geburts- und Sterbekoeffizienten der Komponenten X_{i10} , $i \in \mathcal{I}_Q$ von $X_1(t)$. Die sehr umfangreiche Rechnung ist in "A2 Anhang zu Abschn. III.3.2" im einzelnen aufgeführt, während hier nur das Ergebnis angegeben wird. Die neuen Formeln lauten gemäß Gl.(III.3.103) bzw. Gl.(III.3.111) des genannten Anhangs:

$$\phi_{i10}(\omega_1) = p_{i0} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{N}_{i0}}{\prod \xi_l(x_{1BL}(\omega_1))} \right] \cdot \xi_0(x_{1BL}(\omega_1)) \cdot b_{i10}(\omega_1), \quad i \in \mathcal{I}_Q, \omega_1 \in \Omega_{1e} \quad (\text{III.3.3})$$

und

$$\theta_{i10}(\omega_1) = \epsilon_{i0} \cdot x_{i10} \cdot b_{i10}(\omega_{10}), \quad i \in \mathcal{I}_Q, \omega_1 \in \Omega_{1e}. \quad (\text{III.3.4})$$

Die Größe $\mathcal{N}_{i0}$ in Gl.(III.3.3) ist (siehe auch Gl.(III.3.21) im obengenannten Anhang) die Menge der Nummern all derjenigen Bündel, über die der Weg $q_i - E_0$ verläuft ($i \in \mathcal{I}_Q$!). Die Nummer des Verbindungsbündels zwischen Teil 1 und Teil 2, also L , ist in $\mathcal{N}_{i0}$ enthalten. Im Beispiel von Bild III.1 ist

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_Q &= \{2, 3\} \\ \mathcal{N}_{20} &= \{4, 5, 9\} \\ \mathcal{N}_{30} &= \{6, 7, 9\} \end{aligned} \quad .$$

Für die Größe p_{i0} in Gl.(III.3.3) gilt gemäß Gl.(III.3.23) von "A2 Anhang zu Abschn. III.3.2":

$$p_{i0} = \sum_{j \in \mathcal{I}_E} p_{ij}, \quad i \in \mathcal{I}_Q. \quad (\text{III.3.5a})$$

$\xi_0(x_{1BL}(\omega_1))$ in Gl.(III.3.3) kann hier als Abkürzung betrachtet werden. Die genaue Formel wird später in Gl. (III.3.12a,b) angegeben. Hier möge die Bemerkung genügen,

daß ξ_0 nur von x_{1BL} , der Zahl belegter Leitungen im Verbindungsbündel abhängt. Außerdem nimmt ξ_0 keine negativen Werte an und keine Werte über 1.

Die in den Gl'en (III.3.3) und (III.3.4) vorkommende Funktion $b_{110}(\omega_1)$ ist der in Gl.(III.1.11c) definierten Hilfsfunktion ähnlich. Sie lautet gemäß Gl.(III.3.102) von "A2 Anhang zu Abschn. III.3.2":

$$b_{110}(\omega_1) = \left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{für solche Zahlentupel } \omega_1, \text{ bei} \\ \quad \text{denen} \\ \quad \text{entweder der Ausdruck } p_{10} \left[\prod_{i \in \mathcal{N}_{10}} \xi_i(x_{1BL}(\omega_1)) \right] \cdot \xi_0(x_{1BL}(\omega_1)) \\ \quad \text{gleich Null ist} \\ \quad \text{oder wenigstens eine Komponente} \\ \quad \text{von } \omega_1 \text{ negativen Wert hat,} \end{array} \right\} i \in \mathcal{I}_Q.$$

$$= 1 \quad \text{sonst,} \quad (III.3.5b)$$

Vergleicht man Gl.(III.3.4) mit Gl.(III.1.12a), dann zeigt sich, daß beide denselben Aufbau haben. Der Vergleich von Gl.(III.3.3) mit Gl.(III.1.11a) zeigt, daß fast derselbe Aufbau vorliegt. Genau derselbe Aufbau läßt sich erreichen, wenn man die folgende, mit $\xi_{1l}(x_{1BL})$ bezeichnete neue Hilfsfunktion einführt:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{a) Fall } l \neq L & \\ \xi_{1l}(x_{1BL}) = \mu_i(x_{1BL}), & \text{falls } l \text{ die Nummer eines Bündels} \\ & \text{ist, das von einer QG des Teils 1} \\ & \text{kommt. Dabei ist } i \text{ die Nummer die-} \\ & \text{ser QG.} \\ & \\ & = \mu_l(x_{1BL}), \quad \text{falls } l \text{ die Nummer eines Bündels} \\ & \text{ist, das zwei KAN'en des Teils 1} \\ & \text{verbindet.} \\ & \\ & = \mu_l(x_{1BL}) \cdot \gamma_j(x_{1BL}), \quad \text{falls } l \text{ die Nummer eines Bündels} \\ & \text{ist, das zu einer EG des Teils 1} \\ & \text{führt. Dabei ist } j \text{ die Nummer} \\ & \text{dieser EG.} \\ \\ \text{b) Fall } l = L & \\ \xi_{1l}(x_{1BL}) = \mu_l(x_{1BL}) \cdot \xi_0(x_{1BL}) & . \end{array} \right\}$$

(III.3.6)

Die Bedeutung dieser neu eingeführten Hilfsfunktion $\zeta_{1i}(x_{1Bi})$ für den Prozeß $\mathcal{X}_i(t)$ ist analog zu derjenigen, die die in Gl.(II.2.7) definierte Hilfsfunktion $\zeta_i(x_{Bi})$ für den Prozeß $\mathcal{X}(t)$ hat. Mit Gl.(III.3.6) wird (in völliger Analogie zu der in Gl.(II.2.11b) definierten Hilfsfunktion $b_{ij}(\omega)$) aus Gl.(III.1.11c) und Gl.(III.3.5b)

$$b_{1ij}(\omega_1) = \left. \begin{array}{l} 0 \text{ für solche Zahlentupel } \omega_1 \text{ bei} \\ \text{denen} \\ \text{entweder der Ausdruck } p_{ij} \left[\frac{1 \in \mathcal{N}_{1ij}}{\prod} \zeta_{1i}(x_{1Bi}(\omega_1)) \right] \\ \text{gleich Null ist} \\ \text{oder wenigstens eine Komponente} \\ \text{von } \omega_1 \text{ negativen Wert hat,} \end{array} \right\} (i,j) \in \mathcal{M}_{T1}$$

$$= 1 \text{ sonst,} \quad (\text{III.3.7a})$$

oder, was dasselbe bedeutet

$$\begin{aligned} b_{1ij}(\omega_1) &= 1 \quad \text{für } \omega_1 \text{ und } \omega_{1ij}^+ \in \Omega_{T1} \\ &= 0 \quad \text{sonst,} \end{aligned} \quad (i,j) \in \mathcal{M}_{T1}. \quad (\text{III.3.7b})$$

Die hierin vorkommende Indexpaarmenge $\mathcal{M}_{T1}$ ist in Gl.(III.1.13) angegeben. Aus Gl.(III.3.3) wird mit Gl.(III.3.6) und Gl.(III.3.7a oder b):

$$\phi_{1io}(\omega_1) = p_{io} \cdot \left[\frac{1 \in \mathcal{N}_{1io}}{\prod} \zeta_{1i}(x_{1Bi}(\omega_1)) \right] \cdot b_{1io}(\omega_1), \quad i \in \mathcal{I}_Q, \omega_1 \in \Omega_{1e}. \quad (\text{III.3.8})$$

Damit haben alle Geburts- und Sterbekoeffizienten der Zustandsgleichungen für Teil 1 einheitlichen Aufbau. Die Zustandsgleichungen lauten gemäß Gl.(III.1.15):

$$0 = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}_{T1}} \left[\phi_{1ij}(\omega_{1ij}^-) \cdot P_1(\omega_{1ij}^-) - (\phi_{1ij}(\omega_1) + \phi_{1ij}(\omega_1) \cdot P_1(\omega_1) + \phi_{1ij}(\omega_{1ij}^+) \cdot P_1(\omega_{1ij}^+)) \right],$$

$$\omega_1 \in \Omega_1. \quad (\text{III.3.9})$$

mit

$$\vartheta_{ij}(\omega_1) = p_{ij} \cdot \left[\frac{(\epsilon \mathcal{M}_{ij}}{\|} \xi_{il}(x_{il}(\omega_1)) \right] \cdot b_{ij}(\omega_1), \quad (i,j) \in \mathcal{M}_{T1}, \omega_1 \in \Omega_{1e} \quad (\text{III.3.10})$$

und

$$\Theta_{ij}(\omega_1) = \varepsilon_{ij} \cdot x_{ij} \cdot b_{ij}(\omega_{1ij}^-), \quad (i,j) \in \mathcal{M}_{T1}, \omega_1 \in \Omega_{1e}. \quad (\text{III.3.11})$$

Betreffs der hierin vorkommenden speziellen Größen p_{i0} und ε_{i0} siehe die Gleichungen (III.3.5a) und (III.3.2)!

Damit sind die Zustandsgleichungen für Teil 1 nicht nur vom Typ eines Geburts- und Todesprozesses. Vielmehr sind unter den speziellen Voraussetzungen der Gl'en (III.3.1) und (III.3.2) auch außerdem die Geburts- und Sterbekoeffizienten genauso wie die des Gesamtsystems gebaut.

III. 3.3 Definition der Hemmungsfunktion

Man denke sich nun den Teil 2 der bisher betrachteten VSt ersetzt durch eine Endabnehmergruppe mit der Freiwahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_0(x)$. Stellt man für diese VSt die Zustandsgleichungen gemäß Abschn. II.2.3 auf, dann haben sie die Form von Gl.(III.3.9), mit dem einzigen Unterschied, daß überall da, wo in Gl.(III.3.9) $\xi_0(x)$ steht nun $\mathcal{P}_0(x)$ auftritt. Damit kann $\xi_0(x)$ als die Freiwahrscheinlichkeit derjenigen (komplexen) Endabnehmergruppe aufgefaßt werden, die der Teil 2 darstellt. Die Interpretation von $\xi_0(x)$ als Wahrscheinlichkeit ist zulässig, da $\xi_0(x)$ keine negativen Werte und keine Werte über 1 annimmt, wie schon in Abschn. III.3.2 festgestellt wurde. $\xi_0(x)$ kann also aufgefaßt werden als die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein vom Teil 1

bis ins Verbindungsbündel Nr. L durchgeschalteter Ruf in seinem weiteren Verlauf nirgends mehr abgewiesen wird unter der Bedingung, daß x Leitungen im Bündel Nr. L belegt sind. Diese Interpretation stimmt mit der Bedeutung der ursprünglichen Form der Funktion ξ_0 (siehe Gl.(III.3.26) in "A2 Anhang zu Abschn. III.3.2") überein. $\xi_0(x)$ sei "Hemmungsfunktion" genannt. Man kann zusammenfassen:

Interessiert man sich nur für das Verkehrsgeschehen in einem rufeliefernden Teil einer VSt (also einem "Teil 1"), dann kann man den angerufenen Teil der VSt (den "Teil 2") sozusagen abspalten und durch die EG E_0 ersetzen, deren Freiwahrscheinlichkeit $\gamma_0(x)$ gleich der Hemmungsfunktion ist. Das ist im Bild III.4 dargestellt. Wie man $\xi_0(x)$

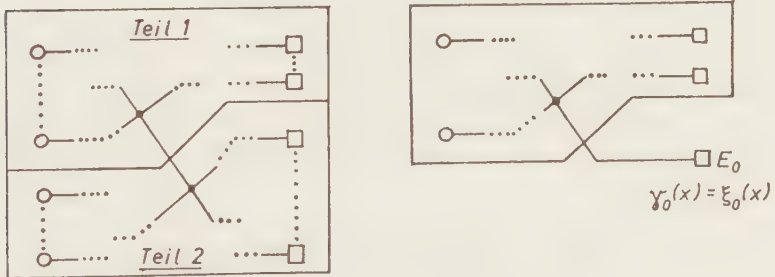


Bild III.4 Ersetzung des abgespaltenen Teils 2 durch eine EG

berechnet, wird in Abschn. III.3.4 erklärt. Die mittlere Enderate von Gesprächen, die zwischen QG'n des Teils 1 und der EG E_0 geführt werden, ist die Größe ε_{i_0} (siehe auch Gl.(III.3.2)). Die Wahrscheinlichkeit, daß ein von der i -ten QG des Teils 1 ausgesendeter Ruf ein Ruf für die EG E_0 ist, ist p_{i_0} (siehe auch Gl.(III.3.5a)).

III. 3.4 Berechnung der Hemmungsfunktion

$\xi_0(x)$ berechnet sich gemäß Gl.(III.3.108) von "A2 Anhang zu Abschn. III.3.2" wie folgt:

$$\xi_0(x) = \left. \begin{aligned} & \frac{\sum_{\omega_2 \in \Omega_2^x} \left[\sum_{j \in \mathfrak{I}_E} p_{oj} \cdot \frac{1 \in \overline{\mathfrak{I}_{L_o}}}{\| \zeta_l(x_{2B_l}(\omega_2)) \cdot F_2^1(\omega_2) \|} \right]}{\sum_{\omega_2 \in \Omega_2^x} F_2^1(\omega_2)} , \text{ für } x \geq 0, \\ & = 0 , \text{ für } x < 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.3.12a)}$$

mit folgender Abkürzung:

$$F_2^1(\omega_2) = \left[\frac{j \in \mathfrak{I}_E}{\|} \frac{(p_{ij})^{x_{2oj}}}{x_{2oj}!} \right] \cdot \left[\frac{(i,j) \in \overline{\mathfrak{M}}^n}{\|} \frac{\left(\frac{p_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \right)^{x_{2ij}}}{x_{2ij}!} \right] \cdot \left[\frac{1 \in \overline{\mathfrak{I}}^n}{\|} \left[\frac{x_{2B_l}(\omega_2) - 1}{\|} \frac{\zeta_l(v)}{\|} \right] \right] . \quad \text{(III.3.12b)}$$

Das Symbol $\overline{\mathfrak{I}_{L_o}}$ in Gl.(III.3.12a) bedeutet eine Indexmenge (siehe Gl.(III.3.21) im oben erwähnten Anhang!). Es ist die Menge derjenigen Bündelnummern, durch die der Weg $Q_i - E_j$ im Teil 2 verläuft, ausschließlich des Verbindungsbündels Nr. L . Im Beispiel von Bild III.1 ist

$$\overline{\mathfrak{I}_{L_o}} = \{12, 13\} ,$$

$$\overline{\mathfrak{I}_{L_o}} = \{14, 15\} .$$

Betreffs p_{oj} siehe Gl.(III.3.2). Das Symbol Ω_2^x in Gl.(III.3.12a) bezeichnet die Menge aller Zustände ω_2 des Teils 2, die im Verbindungsbündel Nr. L genau x belegte Leitungen bewirken. Das Symbol $\overline{n}^u$ in Gl. (III.3.12b) bezeichnet eine Indexmenge (siehe Gl.(III.3.30b) in "A2 Anhang zu Abschnitt III.3.2"). Es ist die Menge der Nummern aller im Teil 2 enthaltenen Bündel, jedoch ohne die Nummer des Verbindungsbündels, die gleich L ist. Im Beispiel von Bild III.1 ist

$$\overline{n}^u = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\} \quad .$$

Aus Gl.(III.3.12a,b) sieht man folgende wichtige Eigenschaft von $\xi_o(x)$: Die rechte Seite dieser Gleichung enthält nur solche Systemparameter (gemeint sind Anruf-raten von Quellen, Aufteilungswahrscheinlichkeiten, Enderaten, Leitungszahlen usw.), die durch den Teil 2 vorgegeben sind. Damit ist $\xi_o(x)$ eine Funktion, die in keiner Weise von den Eigenschaften des Teils 1 abhängt und ausschließlich durch den Teil 2 (Struktur, Leitungszahlen, EG'n, QG'n,..) bestimmt ist.

III. 4 Die Quellfunktion

Der Vergleich von Abschn. III.2 mit Abschn. III.1 zeigt eine Analogie zwischen dem Prozeß $\mathcal{X}_1(t)$, der das Verkehrsgeschehen im Teil 1 beschreibt und dem Prozeß $\mathcal{X}_2(t)$, der das Verkehrsgeschehen im Teil 2 beschreibt. Die Zustandsgleichungen beider Prozesse sind vom Typ des Geburts- und Todesprozesses. Die Analogie zwischen $\mathcal{X}_1(t)$ und $\mathcal{X}_2(t)$ läßt erwarten, daß nicht nur bei $\mathcal{X}_1(t)$, sondern auch bei $\mathcal{X}_2(t)$ die Geburts- und Sterbekoeffizienten unter gewissen Voraussetzungen einen Aufbau haben, der den Koeffizienten des Prozesses $\mathcal{X}(t)$ entspricht. Das ist tatsächlich der Fall, und die zur Hemmungsfunktion analoge Funktion ist hier die "Quellfunktion", die eine Beschreibung der von Teil 1 gebildeten komplexen QG darstellt. Dies wird im folgenden gezeigt.

III. 4.1 Einschränkende Voraussetzungen

Es sei wieder die ursprüngliche Form des Systems - also ohne die einschränkenden Voraussetzungen von Abschn. III.3.1 - betrachtet. Die Geburts- und Sterbekoeffizienten von $\mathcal{X}_2(t)$ sind (vergl. Gl.(III.2.11a,b) mit Gl.(II.2.12) und (III.2.12a,b) mit (II.2.13)) im Falle $(i,j) \in \mathcal{M}^n$ wie diejenigen von $\mathcal{X}(t)$ aufgebaut. Für $(0,j), j \in \mathcal{J}_E$ haben die Koeffizienten von $\mathcal{X}_2(t)$ jedoch einen komplizierteren Aufbau als diejenigen von $\mathcal{X}(t)$. Wenn jedoch die im folgenden genannten zwei Voraussetzungen erfüllt sind, vereinheitlicht sich der Aufbau der Koeffizienten von $\mathcal{X}_2(t)$. Die Voraussetzungen sind:

Vorauss. 1: Es sei:

$$\frac{P_{ij}}{\sum_{k \in \mathcal{J}_E} P_{ik}} = P_{0j}, \quad i \in \mathcal{J}_Q, j \in \mathcal{J}_E \quad (\text{III.4.1})$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gl. (III.3.1).

Vorausss. 2: Es soll gelten:

$$\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}, \quad i \in \mathcal{I}_Q, j \in \mathcal{I}_E. \quad (\text{III.4.2})$$

Eine anschauliche Deutung dieser Voraussetzungen ist analog zu der der Gl.'en (III.3.1), (III.3.2) möglich.

III. 4.2 Die neue Form der Geburts- und Sterbekoeffizienten

Aufgrund der in Abschn. III.4.1 gemachten Voraussetzungen vereinfachen sich die Gl.'en (III.2.11b) und (III.2.12b). Die Rechnung verläuft analog zu der beim Prozeß $\mathcal{X}_1(t)$ (siehe Abschn. III.3.2). Man hat lediglich die Indizes für Teil 1 und Teil 2 sinngemäß zu vertauschen.

Diese Rechnung braucht daher nicht ausgeführt zu werden. Lediglich die der Gl.(III.3.26) (diese Gleichung ist in "A2 Anhang zu Abschn. III.3.2" zu finden) entsprechende Gleichung für Teil 2 sei erwähnt. Bei ihr steht folgender Ausdruck auf der rechten Seite:

$$\frac{\sum_{\omega \in \mathcal{B}(\omega_2)} \left\{ \left[\sum_{i \in \mathcal{I}_Q} \left[p_{i0} \prod_{l \in \overline{\mathcal{N}}_{i0}} \zeta_l(x_{B_l}(\omega)) \right] \right] \cdot F(\omega) \right\}}{\sum_{\omega \in \mathcal{B}(\omega_2)} F(\omega)}.$$

Anmerkung: Während in Gl.(III.3.26) $\overline{\mathcal{N}}_{ij}$ über dem Produktzeichen im Zähler steht, steht hier $\mathcal{N}_{i0}$. Über den Sinn dieser kleinen Unsymmetrie ist eine Bemerkung am Ende von Abschn. III.4.4 zu finden.

Nach Durchführung der Rechnung ergibt sich:

$$\phi_{2oj}(\omega_2) = p_{oj} \cdot \left[\prod_{l \in \overline{\mathcal{N}}_{oj}} \zeta_l(x_{2B_l}(\omega_2)) \right] \cdot G_o(x_{2B_l}(\omega_2)) \cdot b_{2oj}(\omega_2), \quad j \in \mathcal{I}_E, \omega_2 \in \Omega_{2e} \quad (\text{III.4.3})$$

und

$$\Theta_{2oj}(\omega_2) = \varepsilon_{oj} \cdot x_{2oj} \cdot b_{2oj}(\omega_{2oj}), \quad j \in J_E, \omega_2 \in \Omega_{2e}. \quad (\text{III.4.4})$$

$G_0(x_{2BL}(\omega_2))$ in Gl.(III.4.3) kann hier als Abkürzung betrachtet werden. Die genaue Formel wird später in Gl.(III.4.12a,b) angegeben. Hier möge die Bemerkung genügen, daß G_0 nur von x_{2BL} , der Zahl belegter Leitungen im Verbindungsbündel zwischen den Teilen 1 und 2 der VSt abhängt. Außerdem nimmt G_0 keine negativen Werte an.

Die in den Gl.'en (III.4.3) und (III.4.4) vorkommende Funktion $b_{2oj}(\omega_2)$ ist der in Gl.(III.2.11c) definierten ähnlich und lautet:

$$\left. \begin{aligned} b_{2oj}(\omega_2) &= 0 \quad \text{für solche Zehlentupel } \omega_2, \text{ bei} \\ &\quad \text{denen} \\ &\quad \text{entweder der Ausdruck } \rho_{oj} \cdot \left[\prod_{l \in \pi_{oj}} \zeta_l(x_{2Bl}(\omega_2)) \right] \cdot G_0(x_{2BL}(\omega_2)) \\ &\quad \text{gleich Null ist} \\ &\quad \text{oder wenigstens eine Komponente} \\ &\quad \text{von } \omega_2 \text{ negativen Wert hat,} \end{aligned} \right\} j \in J_E.$$

$$= 1 \quad \text{sonst,} \quad (\text{III.4.5})$$

Um zu erreichen, daß Gl.(III.4.3) denselben Aufbau wie Gl.(III.2.11a) bekommt, wird die zu π_{o} analoge Menge π_{oj} definiert. Sie enthält die Nummern derjenigen Bündel, über die der Weg $Q_o - E_j$ verläuft. Die Nummer L des Verbindungsbündels zwischen Teil 1 und Teil 2 sei in π_{oj} enthalten. Im Beispiel von Bild III.1 ist

$$\pi_{o2} = \{ 9, 12, 13 \}$$

$$\pi_{o3} = \{ 9, 14, 15 \} \quad .$$

Nun wird analog zu Gl.(III.3.6) eine neue Hilfsfunktion $\zeta_{2l}(x_{2Bl})$ eingeführt:

a) Fall $l \neq L$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{2l}(x_{2Bl}) &= \wedge_i(x_{2Bl}), && \text{falls } l \text{ die Nummer eines Bündels} \\ &&& \text{ist, das von einer QG des Teils 2} \\ &&& \text{kommt. Dabei ist } i \text{ die Nummer} \\ &&& \text{dieser QG.} \\ &= \mu_l(x_{2Bl}), && \text{falls } l \text{ die Nummer eines Bündels} \\ &&& \text{ist, das zwei KAN'en des Teils 2} \\ &&& \text{verbindet.} \\ &= \mu_l(x_{2Bl}) \cdot \gamma_j(x_{2Bl}), && \text{falls } l \text{ die Nummer eines Bündels} \\ &&& \text{ist, das zu einer EG des Teils 2} \\ &&& \text{führt. Dabei ist } j \text{ die Nummer} \\ &&& \text{dieser EG.} \end{aligned} \right\}$$

b) Fall $l = L$

$$\zeta_{2l}(x_{2Bl}) = G_0(x_{2Bl}) .$$

(III.4.6)

Die Bedeutung dieser neu eingeführten Hilfsfunktion $\zeta_{2l}(x_{2Bl})$ für den Prozeß $\chi_2(t)$ ist analog der in Gl.(III.3.6) für den Prozeß $\chi_1(t)$ eingeführten Hilfsfunktion $\zeta_{1l}(x_{1Bl})$. Mit Gl.(III.4.6) wird (in völliger Analogie zu der in Gl.(II.2.11b) definierten Hilfsfunktion $b_{ij}(\omega)$) aus Gl.(III.2.11c) und Gl.(III.4.5)

$$\left. \begin{aligned} b_{2ij}(\omega_2) &= 0 \text{ für solche Zahlentupel } \omega_2, \text{ bei} \\ &\text{denen} \\ &\text{entweder der Ausdruck } p_{ij} \cdot \left[\prod_{l \in \mathcal{M}_{ij}} \zeta_{2l}(x_{2Bl}(\omega_2)) \right] \\ &\text{gleich Null ist} \\ &\text{oder wenigstens eine Komponente} \\ &\text{von } \omega_2 \text{ negativen Wert hat,} \end{aligned} \right\} (i,j) \in \mathcal{M}_{T_2}$$

$$= 1 \text{ sonst,}$$

(III.4.7a)

oder anders ausgedrückt

$$\left. \begin{aligned} b_{2ij}(\omega_2) &= 1 \text{ für } \omega_2 \text{ und } \omega_{2ij}^+ \in \Omega_2, \\ &= 0 \text{ sonst,} \end{aligned} \right\} (i,j) \in \mathcal{M}_{T_2} .$$

(III.4.7b)

Die hierin vorkommende Indexpaarmenge $\mathcal{M}_{T_2}$ ist in Gl.(III.2.13) angegeben.

Aus Gl.(III.4.3) wird mit den Gl.'en (III.4.6) und (III.4.7a oder b):

$$\phi_{2oj}(\omega_2) = \rho_{oj} \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{oj}}{\| \zeta_{2l}(x_{2Bl}(\omega_2)) \|} \right] \cdot b_{2oj}(\omega_2), \quad j \in \mathcal{J}_E, \omega_2 \in \Omega_{2e}. \quad (\text{III.4.8})$$

Damit haben alle Geburts- und Sterbekoeffizienten der Zustandsgleichungen für Teil 2 einheitlichen Aufbau. Die Zustandsgleichungen lauten gemäß Gl.(III.2.15):

$$0 = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}_{T2}} \left[\phi_{2ij}(\omega_{2ij}^-) \cdot P_2(\omega_{2ij}^-) - (\theta_{2ij}(\omega_2) + \phi_{2ij}(\omega_2)) \cdot P_2(\omega_2) + \theta_{2ij}(\omega_{2ij}^+) \cdot P_2(\omega_{2ij}^+) \right],$$

$$\omega_2 \in \Omega_2. \quad (\text{III.4.9})$$

mit

$$\phi_{2ij}(\omega_2) = \rho_{ij} \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\| \zeta_{2l}(x_{2Bl}(\omega_2)) \|} \right] \cdot b_{2ij}(\omega_2), \quad (i,j) \in \mathcal{M}_{T2}, \omega_2 \in \Omega_{2e} \quad (\text{III.4.10})$$

und

$$\theta_{2ij}(\omega_2) = \varepsilon_{ij} \cdot x_{2ij} \cdot b_{2ij}(\omega_{2ij}^-), \quad (i,j) \in \mathcal{M}_{T2}, \omega_2 \in \Omega_{2e}. \quad (\text{III.4.11})$$

Betreffs der hierin vorkommenden speziellen Größen ρ_{oj} und ε_{oj} siehe die Gleichungen (III.4.1) und (III.4.2)!

Damit sind die Zustandsgleichungen für Teil 2 nicht nur vom Typ eines Geburts- und Todesprozesses, vielmehr haben sie noch folgende Eigenschaft: Unter den speziellen Voraussetzungen der Gl.'en (III.4.1) und (III.4.2) sind die Geburts- und Sterbekoeffizienten genauso wie die des Gesamtsystems aufgebaut.

III. 4.3 Definition der Quellfunktion

Mit den zu Abschn. III.3.3 analogen Überlegungen findet man, daß die in Gl.(III.4.3) auftretende Funktion $G_0(x)$ eine Beschreibung der Erzeugung derjenigen Rufe darstellt, die der Teil 1 insgesamt über das Verbindungsbündel Nr. L in den Teil 2 schickt. $G_0(x)$ kann als mittlere Anrufrate bei x belegten Leitungen im Bündel Nr. L interpretiert werden und sei "Quellfunktion" genannt.

Interessiert man sich nur für das Verkehrsgeschehen in einem angerufenen Teil der VSt, also einem "Teil 2", dann kann man den rufeliefernden Teil der VSt (also den "Teil 1") abspalten und durch die QG Q_0 ersetzen, deren mittlere Anrufrate $\Lambda_0(x)$ gleich der Quellfunktion $G_0(x)$ ist (siehe Bild III.5). Die

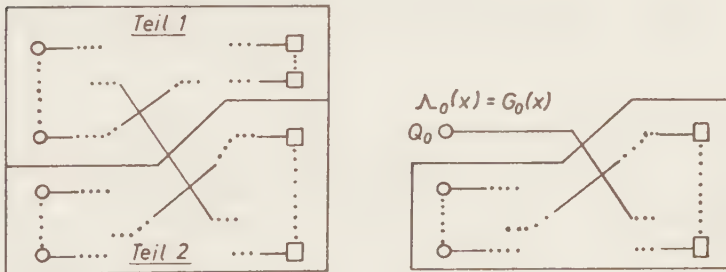


Bild III.5 Ersetzung des abgespaltenen Teils 1 durch eine QG

Formel zur Berechnung von $G_0(x)$ ist im Abschn. III.4.4 angegeben. Die mittlere Enderate von Gesprächen, die zwischen der QG Q_0 und EG'n des Teils 2 geführt werden, ist ε_j (siehe Gl.(III.4.2)). Die Wahrscheinlichkeit, daß ein von der QG Q_0 ausgesendeter Ruf ein Ruf für die EG E_j ist, ist p_{0j} (siehe Gl.(III.4.1)).

III. 4.4 Berechnung der Quellfunktion

Die zu Gl.(III.3.12a,b) analoge Gleichung für $G_0(x)$ lautet:

$$G_0(x) = \left. \begin{aligned} & \frac{\sum_{\omega_1 \in \Omega_1^x} \left[\sum_{i \in \mathcal{I}_Q} p_{i0} \prod_{l \in \mathcal{N}_{i0}} \zeta_l(x_{lB_l}(\omega_1)) \cdot F_1^-(\omega_1) \right]}{\sum_{\omega_1 \in \Omega_1^x} F_1^-(\omega_1)}, & \text{für } x \geq 0, \\ & = 0 & \text{für } x < 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.4.12a})$$

mit folgender Abkürzung:

$$F_1^-(\omega_1) = \left[\prod_{i \in \mathcal{I}_Q} \frac{(p_{i0})^{x_{i0}}}{x_{i0}!} \right] \left[\prod_{(i,j) \in \mathcal{N}^1} \frac{(p_{ij})^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \right] \left[\prod_{l \in \mathcal{N}^1} \frac{x_{lB_l}(\omega_1)^{x_{lB_l}(\omega_1)-1}}{\zeta_l(y)} \right] \quad (\text{III.4.12b})$$

Hierin ist $\mathcal{N}^1$ eine Indexmenge. Es ist die Menge der Nummern der im Teil 1 enthaltenen Bündel, das Verbindungsbündel Nr. L nicht mitgerechnet. Im Beispiel von Bild III.1 ist:

$$\mathcal{N}^1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad .$$

Betreffs p_{i0} in Gl.(III.4.12a,b) siehe Gl.(III.3.5a). Das Symbol Ω_1^x bezeichnet die Menge all derjenigen Zustände ω_1 des Teils 1, die im Verbindungsbündel Nr. L genau x belegte Leitungen bewirken.

Aus Gl.(III.4.12a,b) ersieht man eine wichtige Eigenschaft von $G_o(x)$: Die Quellfunktion enthält nur solche Systemparameter, die durch den Teil 1 vorgegeben sind. $G_o(x)$ ist also eine Funktion, die in keiner Weise von den Eigenschaften des Teils 2 abhängt und ausschließlich durch den Teil 1 bestimmt ist. $G_o(x)$ verhält sich damit völlig analog zur Hemmungsfunktion $\xi_o(x)$ (vergl. Abschn. III.3.4).

Abschließend sei noch eine Bemerkung über den Sinn einer zwischen der Hemmungsfunktion und der Quellfunktion bestehenden kleinen Unsymmetrie gemacht: Sie betrifft die Indexmenge π_{io} und die dazu nicht ganz analoge Menge $\overline{\pi_{oj}}$. Diese Unsymmetrie ist bewußt eingeführt worden. Damit wird erreicht, daß die Überlegungen von Abschn. III.1 + III.3 bzw. III.2 + III.4 für grundsätzlich alle Bündel der VSt gelten. Sie gelten also auch für solche Bündel, die direkt von QG'n kommen bzw. direkt zu EG'n gehen.

III. 5 Die Betriebsbedingungen der Koppelanordnungen innerhalb der Vermittlungsstelle

III. 5.1 Entwicklung von Voraussetzungen

Zu betrachten ist das im Teil II der vorliegenden Arbeit untersuchte Modell für ein aus Teilnehmern und einer VSt bestehende Wählvermittlungssystem. Die Zahl der KAn'en sei mit u bezeichnet. Neben den Bündeln seien auch die KAn'en der VSt in irgendeiner Weise mit Nummern gekennzeichnet. Ein Beispiel zeigt Bild III.6.

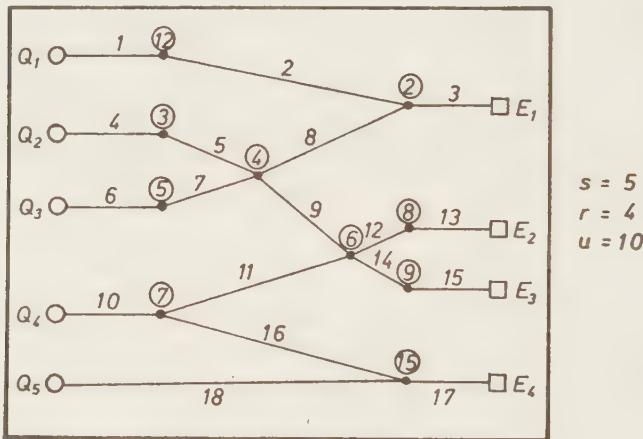


Bild III.6 Die VSt von Bild III.1 mit Numerierung der KAn'en

Die Beschreibung "angerufener" Teile der VSt ist gemäß Abschn. III.3 durch Hemmungsfunktionen möglich, wenn die Voraussetzungen (III.3.1) und (III.3.2) auf dem Verbindungsbündel gelten. Gemäß Abschn. III.4 können "anrufende" Teile durch Quellfunktionen beschrieben werden, wenn die

Voraussetzungen (III.4.1) und (III.4.2) auf dem Verbindungs­bündel gelten. Gelten nun an einer betrachteten KAN - ihre Nummer sei m - die genannten Voraussetzungen auf allen Abnehmerbündeln, dann kann man jeden über ein Richtungs­bündel von der KAN mit Rufen belieferten Teil der VSt durch je eine Hemmungsfunktion beschreiben. Man kann also diese Teile "abspalten". Ein solches mehrmaliges Abspalten ist erlaubt. Der Grund ist, daß der Typ des mathematischen Modells sich durch das Abspalten von Teilen nicht ändert. Das verbleibende Restsystem ist vom Typ des ursprünglichen Systems.

Gelten an der betrachteten KAN Nr. m außerdem die genannten Voraussetzungen auf allen Zubringerbündeln, dann kann man auch die die KAN mit Rufen beliefernden Teile der VSt abspalten (und durch Quellfunktionen beschreiben).

Bei der Berechnung der Quell- und Hemmungsfunktionen ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge man abspaltet. Der Grund ist, daß Quell- und Hemmungsfunktionen ausschließlich durch Eigenschaften und Parameter des jeweils abgespalteten Teils bestimmt sind (siehe die Gl.'en (III.4.12a,b) und (III.3.12a,b)). Damit ergibt sich bei der Abspaltung eines bestimmten angerufenen Teils immer derselbe Verlauf für die Hemmungsfunktion, gleichgültig wie der anrufende Teil aussieht. Es spielt also keine Rolle, ob und welche Teile man evtl. früher schon vom angerufenen Teil abgespalten hat. Eine analoge Überlegung gilt auch für die Quellfunktion.

Unter den genannten Voraussetzungen läßt sich also sozusagen die "Umgebung" der KAN Nr. m durch Quell- und Hemmungsfunktionen beschreiben (siehe z.B. Bild III.7). Wenn dies für alle KAN'en der VSt möglich sein soll, dann müssen die Voraussetzungen der Abschnitte III.3.1 und III.4.1 auf allen Bündeln der VSt gleichzeitig gelten.

Dies zu erreichen ist vergleichsweise einfach: Die Gl.'en (III.3.1) und (III.4.1) sind identisch. Damit ist folgende allgemeine Voraussetzung zu machen:

$$\frac{p_{ij}}{\sum_{k \in \mathcal{I}_{El}} p_{ik}} = p_{ioj} \quad , \quad \left. \begin{array}{l} i \in \mathcal{I}_{Ql}^* \\ j \in \mathcal{I}_{El}^* \\ l \in \mathcal{N} \end{array} \right\} \quad (\text{III.5.1})$$

Hierin sind $\mathcal{I}_{Ql}^*$ und $\mathcal{I}_{El}^*$ die früher mit $\mathcal{I}_Q$ und $\mathcal{I}_E$ bezeichneten Indexmengen. l ist die Nummer des zu betrachtenden Bündels. In den Abschnitten III.1 bis III.4 wurde von "durchschnittlichen" Bündeln gesprochen. Die Nummer war dort mit L bezeichnet worden.

Wenn man schließlich voraussetzt, daß die mittleren Enderraten ε_{ij} der ganzen VSt einheitlich gleich ε sind, dann sind die Voraussetzungen (III.3.2) bzw. (III.4.2) auf allen Bündeln der VSt erfüllt. Es gelte also

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \quad , \quad (i,j) \in \mathcal{M} \quad . \quad (\text{III.5.2})$$

III. 5.2 Die Betriebsbedingungen der Koppelanordnungen innerhalb der Vermittlungsstelle

Es sollen die Voraussetzungen Gl.(III.5.1) + (III.5.2) gelten. Die VSt, genauer gesagt das mathematische Modell für das aus Teilnehmern und einer VSt bestehenden System, ist dann durch Eigenschaften gekennzeichnet, die im folgenden kurz verbal zusammengefaßt seien:

- a) Die VSt hat Fächerstruktur. Sie ist aus u KAN'en mit vollkommener Erreichbarkeit aufgebaut*). Zahl der Zubringerbündel und Zahl der Richtungsbündel jeder KAN hängen von der Lage im System ab.
- b) Die Rufe werden von s QG'n erzeugt. Deren mittlere Anruf-rate darf in beliebiger Form von der Zahl belegter Quellen abhängen und muß nur der (selbstverständlichen) Voraussetzung (II.1.1) genügen**). Die mittlere Anruf-rate der i -ten QG wird mit $\lambda_i(x)$ bezeichnet.
- c) Die auf insgesamt r (Richtungs-)Bündeln der ausgangs-seitigen KAN'en abgehenden Verkehre gehen zur r EG'n. Jede ist durch eine Freiwahrscheinlichkeit beschrieben, die in beliebiger Form von der Zahl belegter Endabnehmer abhängen darf und nur der (selbstverständlichen) Voraussetzung (II.1.2) genügen muß. Die Freiwahrscheinlichkeit der j -ten EG wird mit $f_j(x)$ bezeichnet.
- d) Die Angabe darüber, wohin ein in der i -ten QG erzeugter Ruf verbunden werden soll, geschieht durch die Aufteilungswahrscheinlichkeit p_{ij} . Dies ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein in der QG Q_i erzeugter Ruf ein Ruf an die EG E_j ist. p_{ij} muß die Voraussetzung (III.5.1) erfüllen. Das bedeutet anschaulich, daß in jedem Bündel der VSt folgendes gilt: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein im betrachteten Bündel ankommender Ruf zu einer bestimmten EG zielt, hängt nicht davon ab, aus welcher QG er stammt. Die Voraussetzung (III.5.1) ist nicht sehr einschränkend und bedeutet z.B. nicht, daß alle EG'n gleichwahrscheinlich gewünscht werden oder ähnliches.
- e) Die mittlere Gesprächsdauer ist gemäß der Voraussetzung (III.5.2) für alle Verbindungen einheitlich und gleich $1/\varepsilon$. Das ist eine in der Fernsprechkverkehrstheorie übliche Voraussetzung.

Es sind also alle Voraussetzungen erfüllt, um an jeder KAN der VSt die Erzeugung der ankommenden Rufströme durch Quellfunktionen beschreiben zu können. Die Hemmungen, die die von der jeweiligen KAN abgehenden Rufe in ihrem weiteren Verlauf noch erfahren, kann man durch Hemmungsfunktionen beschreiben.

*) Bezüglich unvollkommener Erreichbarkeit siehe Abschn. III.8.

**) Damit sind z.B. sowohl die Modellvorstellung ZV1, d.h. $\lambda(x) = \text{const.}$, wie auch ZV2, d.h. $\lambda(x) = \alpha \cdot (z_q - x)$ als Spezialfälle zugelassen.

Führt man den in Abschn. III.5.1 beschriebenen mehrfachen Abspaltvorgang für eine zu betrachtende KAN durch, dann besteht das verbleibende Restsystem aus einer einzigen KAN. Sie habe die Nummer m . Es sei s_m die Zahl ihrer Zubringerbündel und r_m die Zahl ihrer abgehenden Richtungen. Mit $G_{mi}(x)$ sei diejenige Quellfunktion bezeichnet, die die Erzeugung der im i -ten Zubringerbündel*) ankommenden Rufe beschreibt. Sie ist durch Gl.(III.4.12a,b) gegeben. Die Hemmungsfunktion, die die (weiteren) Hemmungen der im j -ten Abnehmerbündel*) abgehenden Rufe beschreibt, sei mit $\xi_{mj}(x)$ bezeichnet. Sie ist durch Gl.(III.3.12a,b) gegeben.

Je nachdem, ob der letzte Schritt des mehrfachen Abspaltvorganges das Abspalten eines angerufenen oder eines anrufenden Teils war, sind die Geburts- und Sterbekoeffizienten des Restsystems durch die Gl.'en (III.3.10) + (III.3.11) oder durch die Gl.'en (III.4.10) + (III.4.11) gegeben. Das Ergebnis ist jedoch dasselbe und hat folgende Form (die Argumente der Funktionen seien weggelassen):

$$\left. \begin{aligned} \phi_{aij} &= p_{mij}^* \cdot G_{mi} \cdot \mu_i \cdot \xi_{mj} \cdot b_{aj} \\ \theta_{aij} &= \varepsilon \cdot x_{aj} \cdot b_{aj} \end{aligned} \right\} a = 1 \text{ bzw. } 2 .$$

Für i ist jeweils die Nummer desjenigen Bündels zu nehmen, das das j -te Abnehmerbündel der KAN Nr. m darstellt. p_{mij}^* ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein an der KAN Nr. m im i -ten Zubringerbündel ankommender Ruf ins j -te Abnehmerbündel verbunden werden will. Sie sei "Richtungswahrscheinlichkeit" der KAN Nr. m genannt. Wie man p_{mij}^* berechnet, wird weiter unten erklärt.

*) Die Zubringer- und Abnehmerbündel der KAN'en seien - entsprechend der Numerierung der QG'en und EG'en im Gesamtsystem gemäß Abschn. II.2.1 - von oben nach unten durchnummeriert (siehe z.B. Bild III.7, Bild III.8).

Damit liegen folgende Angaben zu den Betriebsverhältnissen der KAN Nr. m vor: Die QG'n sind durch die Quellfunktionen beschrieben, die EG'n durch die Hemmungsfunktionen (siehe z.B. Bild III.7). Die mittlere Belegungsdauer aller Verbindungen in der KAN ist $1/\varepsilon$. Die Angabe, zu welchem Abnehmerbündel ein im i -ten Zubringerbündel angekommener Ruf verbunden werden will, geschieht durch die Richtungswahrscheinlichkeit p_{mij}^* .

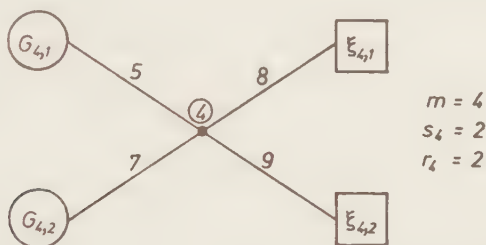


Bild III.7 Beschreibung der "Umgebung" der KAN Nr.4 von Bild III.6 durch Quell- und Hemmungsfunktionen. Die Argumente dieser Funktionen sind hier weggelassen.

III. 5.3 Berechnung der Richtungswahrscheinlichkeit

Es bleibt noch nachzutragen, wie sich die p_{mij}^* aus den p_{ij} , den Aufteilungswahrscheinlichkeiten des Gesamtsystems, bestimmen lassen.

Der Ausdruck für p_{mij}^* entsteht während des mehrfachen Abspaltvorganges durch wiederholte Benutzung der Gl. (III.3.1). p_{mij}^* ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß in das j -te Richtungsbündel der KAN Nr. m weiterverbunden werden soll, falls im i -ten Zubringerbündel ein Ruf ankommt. Mit anderen Worten: Es ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß eine der vom j -ten Abnehmerbündel der KAN Nr. m aus erreichbaren EG'n gewünscht wird unter der Bedingung, daß

eine der vom i -ten Zubringerbündel dieser KAN erreichbaren EG'n angerufen wird. Damit ergibt sich p_{mij}^* wie folgt aus den p_{ij} :

Es sei $\mathcal{J}_{Emj}$ die Menge der Nummern derjenigen EG'n der VSt, die vom j -ten Abnehmerbündel der KAN Nr. m erreicht werden können. Z.B. ist für die VSt von Bild III.6:

$$\mathcal{J}_{E4,2} = \{2, 3\}, \quad \mathcal{J}_{E3,1} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{J}_{E15,1} = \{4\}.$$

Die Menge derjenigen EG'n der VSt, die vom i -ten Zubringerbündel der KAN Nr. m aus erreicht werden können, ist unabhängig von i für alle Zubringerbündel dieser KAN dieselbe Menge, da es eine grundlegende Eigenschaft jeder KAN ist, daß sie von jedem ihrer Zubringerbündel aus Verbindungen zu jedem ihrer Abnehmerbündel herstellen kann. Damit ist die mit $\mathcal{J}_{Em}$ bezeichnete Menge der EG'n, die von den Zubringerbündeln der KAN Nr. m aus erreicht werden können, gleich der Vereinigung der von allen Abnehmerbündeln dieser KAN aus erreichbaren EG'n:

$$\mathcal{J}_{Em} = \bigcup_{j=1,2,\dots,r_m} \mathcal{J}_{Emj}. \quad (\text{III.5.3})$$

Es sei α die Nummer einer QG, von der Rufe im i -ten Zubringerbündel der KAN Nr. m ankommen können. Dann gilt für die Rufe der QG Nr. α :

$$p_{mij}^* = \frac{\sum_{\nu \in \mathcal{J}_{Emj}} p_{\alpha\nu}}{\sum_{\nu \in \mathcal{J}_{Em}} p_{\alpha\nu}}. \quad (\text{III.5.4})$$

Dies heißt umgeschrieben:

$$p_{mij}^* = \frac{\sum_{\nu \in \mathcal{I}_{Emj}} p_{\alpha\nu}}{\sum_{\nu \in \mathcal{I}_{Em}} p_{\alpha\nu}} \quad .$$

Der Quotient auf der rechten Seite dieser Gleichung ist die Wahrscheinlichkeit p_{lov} von Gl.(III.5.1), wenn man für diejenige Bündelnummer nimmt, mit der in der VSt das i -te Zubringerbündel der KAn Nr. m bezeichnet ist und ν statt j in Gl.(III.5.1) schreibt. Gemäß Voraussetzung (III.5.1) hat dieser Quotient für alle diejenigen QG'n denselben Wert, aus denen Rufe im i -ten Zubringerbündel der KAn Nr. m ankommen können. Die Menge dieser QG'n (sie entspricht der Menge $\mathcal{I}_{ai}^*$ von Gl.(III.5.1)) sei hier nun mit $\mathcal{I}_{ami}$ bezeichnet. Z.B. ist für die VSt von Bild III.6:

$$\mathcal{I}_{a2,2} = \{2,3\}, \quad \mathcal{I}_{a4,2} = \{3\}, \quad \mathcal{I}_{a6,1} = \{2,3\}, \quad \mathcal{I}_{a6,2} = \{4\} \quad .$$

Damit gilt:

$$p_{mij}^* = \frac{\sum_{\nu \in \mathcal{I}_{Emj}} p_{\alpha\nu}}{\sum_{\nu \in \mathcal{I}_{Em}} p_{\alpha\nu}}, \quad \left. \begin{array}{l} \alpha \text{ beliebig,} \\ \text{aber } \alpha \in \mathcal{I}_{ami}. \end{array} \right\} \quad (\text{III.5.5})$$

Damit hat p_{mij}^* für alle $\alpha \in \mathcal{I}_{ami}$ denselben Wert. Die Berechnung der Richtungswahrscheinlichkeit p_{mij}^* kann also mittels Gl.(III.5.5) erfolgen, wobei α ein beliebiger Wert aus $\mathcal{I}_{ami}$ sein darf.

III. 5.4 Zusammenfassung und Bemerkungen

Die wichtigsten Merkmale einer VSt der in Teil II betrachteten Klasse von VSt'n, die außerdem die Voraussetzungen (III.5.1) und (III.5.2) erfüllen, sind im Abschn. III.5.2 genannt. In solchen VSt'n kann an jeder KAN die Erzeugung der auf den Zubringerbündeln ankommenden Rufe durch Quellfunktionen beschrieben werden. Die Quellfunktionen sind durch Gl.(III.4.12a,b) gegeben. Die Hemmungen, die die auf den Abnehmerbündeln der KAN'en abgehenden Rufe erfahren, können durch Hemmungsfunktionen beschrieben werden. Diese sind durch Gl.(III.3.12a,b) gegeben. Die mittlere Dauer aller Belegungen in den KAN'en ist einheitlich und gleich $1/\epsilon$. Die Richtungswahrscheinlichkeiten für die KAN'en sind gemäß Gl.(III.5.5) aus den Aufteilungswahrscheinlichkeiten berechenbar.

Die Betriebsbedingungen der KAN'en innerhalb der VSt unterscheiden sich prinzipiell von denen des sogenannten "isolierten Betriebs". Beim isolierten Betrieb werden der KAN Zufallsverkehre, ZV1 oder ZV2, angeboten. Innerhalb der VSt werden der KAN Verkehre angeboten, die durch Quellfunktionen beschrieben sind. Beim Zufallsverkehr ist die mittlere Anrufrate $\Lambda(x)$ ein Polynom nullten Grades (Fall ZV1) oder ersten Grades (Fall ZV2) in x^*). Bei der durch Quellfunktionen beschriebenen Ruferzeugung hat jedoch die mittlere Anrufrate einen allgemeinen Verlauf über x . Numerische Beispiele zeigen folgendes: Selbst wenn der VSt nur Zufallsverkehre 1. Art angeboten werden, sind die Quellfunktionen im allgemeinen weder Konstante noch Gerade, sondern haben einen allgemeinen Verlauf. Damit kann man die Erzeugung der an den KAN'en innerhalb der VSt ankommenden Rufströme nicht durch Zufallsverkehre erster oder zweiter Art beschreiben. Die Betriebsbedingungen der KAN'en

*) Hier wird der Einfachheit halber so getan, als wäre x eine kontinuierliche Variable. Genau genommen sind die hier betrachteten Funktionen natürlich nur für ganzzahlige Werte von x definiert.

innerhalb der VSt unterscheiden sich von denen des isolierten Betriebes außerdem noch darin, daß die abgehenden Rufe im allgemeinen noch Hemmungen erfahren, zu deren Beschreibung die Hemmungsfunktionen dienen. Beim isolierten Betrieb dagegen wird davon ausgegangen, daß keine derartigen Hemmungen vorliegen, was bedeutet, daß die jeweilige Hemmungsfunktion $\xi(x)$ konstant den Wert 1 hat. Bei KAN'en innerhalb von VSt'n hat $\xi(x)$ aber einen allgemeinen Verlauf. Numerische Beispiele zeigen, daß die Funktionswerte von $\xi(x)$ im allgemeinen selbst dann den Wert 1 deutlich unterschreiten, wenn alle von der VSt abgehenden Verkehre keine weiteren Hemmungen mehr erfahren. Dabei nehmen - was sehr plausibel ist - die Funktionswerte von $\xi(x)$ mit steigendem x ab.

Die an den KAN'en innerhalb der VSt ankommenden Verkehre nennt man auch "geglättete" Verkehre. "Geglätteter Verkehr" ist eine in der Fernsprechverkehrstheorie viel verwendete Bezeichnung für Verkehre, die schon eine oder mehrere KAN'en durchlaufen haben. Seit langem interessiert man sich für die statistischen Eigenschaften dieser Verkehre und sucht nach geeigneten Beschreibungen ([1], [3], [12], [13], [14], [15], [17], [19], [20], [29]). Da aber die Lösung der Zustandsgleichungen für die jeweils betrachteten (meist aus nur wenigen KAN'en bestehenden) Anordnungen nicht gelang, mußte man sich auf Näherungsbetrachtungen oder numerische Ergebnisse aus Simulationen beschränken. Dagegen steht mit den Quellfunktionen eine allgemeingültige Beschreibung geglätteter Verkehre für die in Abschn. III.5.2 beschriebene Klasse von VSt'n zur Verfügung: Die Erzeugung der in solchen Systemen vorkommenden geglätteten Verkehre kann durch die Quellfunktion $G(x)$ beschrieben werden. $G(x)$ hängt von der Zahl belegter Quellen bzw. Leitungen ab und kann als eine mittlere Anrufrate interpretiert werden. $G(x)$ ist (siehe oben) im allgemeinen weder eine Konstante noch eine Gerade. Numerische Beispiele zeigen (was auch sehr plausibel ist), daß die Funktionswerte von $G(x)$ mit steigendem x abnehmen.

III. 6 Untersuchung der Koppelanordnungen für die innerhalb der Vermittlungsstelle auftretenden Betriebsbedingungen

III. 6.1 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten der Koppelanordnungen

Die Betriebsverhältnisse von KAN'en innerhalb einer VSt sind, falls die VSt zu der in Abschn. III.5.2 beschriebenen Klasse gehört, im wesentlichen durch die Quell- und Hemmungsfunktionen gekennzeichnet. Diese Funktionen hängen jeweils von der Zahl belegter Quellen bzw. Endabnehmern ab. Die Quellfunktionen $G_{m,1}(x), \dots, G_{m,s_m}(x)$ beschreiben die Erzeugung der auf den Zubringerbündeln der KAN Nr. m ankommenden Rufströme. Die Hemmungsfunktionen $\xi_{m,1}(x), \dots, \xi_{m,r_m}(x)$ beschreiben die Hemmungen, die die auf den Richtungsbündeln der KAN Nr. m abgehenden Rufe außerhalb der KAN noch erfahren (siehe Bild III.8). Die mittlere Belegungsdauer ist



Bild III.8 Betriebsbedingungen von KAN'en innerhalb der VSt (Argumente der Funktionen weggelassen !)

einheitlich und gleich $1/\epsilon$. Die Richtungswahrscheinlichkeit ist ρ_{mij}^* . Die so betriebene KAN stellt eine VSt der im Teil II behandelten Klasse dar. Sie hat lediglich die

Besonderheit, daß sie aus nur einer KAn besteht. Die Ergebnisse von Teil II können also hier angewendet werden.

Es sei

$$\omega^{(m)} = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{s_m, r_m}) \quad (\text{III.6.1})$$

ein Punkt im Raum aller Zustände, derer die KAn Nr. m fähig ist. Dieser Zustandsraum sei mit $\Omega_{KAn, m}$ bezeichnet. Dabei ist v_{ij} die Zahl derjenigen Gespräche, die vom i -ten Zubringerbündel der KAn Nr. m in deren j -tes Abnehmerbündel durchgeschaltet sind. Dann ist

$$x_{zi} = \sum_{j=1}^{r_m} v_{ij} \quad (\text{III.6.2})$$

die Zahl belegter Leitungen im i -ten Zubringerbündel und

$$x_{Aj} = \sum_{i=1}^{s_m} v_{ij} \quad (\text{III.6.3})$$

die Zahl belegter Leitungen im j -ten Abnehmerbündel. n_{zmi} sei die Leitungszahl des i -ten Zubringerbündels und n_{Amj} die Leitungszahl des j -ten Abnehmerbündels. Weiter sei in Analogie zu Gl.(II.2.5) folgende Funktion definiert:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{mj}(x) &= 1 && \text{für } 0 \leq x < n_{Amj} , \\ &= 0 && \text{sonst} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.6.4})$$

Die Symbole $\mu_{mj}(x)$ sind lediglich neue Bezeichnungen für bereits bekannte Funktionen. Z.B. ist in Bild III.6:

$$\begin{aligned}\mu_{4,1}(x) &\equiv \mu_8(x), \\ \mu_{4,2}(x) &\equiv \mu_9(x), \\ \mu_{15,1}(x) &\equiv \mu_{17}(x).\end{aligned}$$

Die nicht normierte Lösung der Zustandsgleichungen der KAN Nr. m ergibt sich aus Gl.(II.3.10). Sie sei mit $F^{(m)}(\omega^{(m)})$ bezeichnet und lautet:

$$F^{(m)}(\omega^{(m)}) = \left[\prod_{i=1}^{s_m} \frac{r_m}{j=1} \left(\frac{P_{mij}^*}{\epsilon} \right)^{q_{ij}} \right] \left[\prod_{i=1}^{s_m} \frac{x_{zi} - 1}{\prod_{\nu=0} G_{mi}(\nu)} \right] \left[\prod_{j=1}^{r_m} \frac{x_{ji} - 1}{\prod_{\nu=0} \mu_{mj}(\nu)} \xi_{mj}(\nu) \right]. \quad (\text{III.6.5})$$

Für die Zustandswahrscheinlichkeiten gilt dann gemäß Gl.(II.3.11)

$$P^{(m)}(\omega^{(m)}) = \frac{F^{(m)}(\omega^{(m)})}{\sum_{\gamma^{(m)} \in \Omega_{KANm}} F^{(m)}(\gamma^{(m)})} \quad . \quad (\text{III.6.6})$$

III. 6.2 Verkehrsgrößen der Koppelanordnungen

Zur Berechnung der Verkehrsgrößen faßt man die KAN wie in Abschn. III.6.1 als VSt mit nur einer KAN auf und berechnet die interessierenden Verkehrsgrößen gemäß Abschn. II.4. Es können alle dort angegebenen Formeln angewendet

werden. Da das hier zu betrachtende System aber nur aus einer KAN besteht, vereinfacht sich vieles. Hier einige Beispiele:

Es sei $\gamma^{(m)}(i,j)$ die mittlere Zahl gleichzeitig bestehender Verbindungen zwischen dem i -ten Zubringerbündel und dem j -ten Abnehmerbündel der KAN Nr. m . $c_L^{(m)}(i,j)$ sei die mittlere Zahl von beginnenden Belegungen zwischen dem i -ten Zubringerbündel und dem j -ten Abnehmerbündel pro Zeiteinheit. Die Größen $c_V^{(m)}(i,j)$ und $c_W^{(m)}(i,j)$ sind mittlere Zahlen von Rufen pro Zeiteinheit und betreffen jeweils die an der KAN Nr. m im Zubringerbündel Nr. i ankommenden und in das Abnehmerbündel Nr. j zielenden Rufe. Der zusätzliche Index V bedeutet "in der KAN abgewiesene Rufe", und W bedeutet "im weiteren Verlauf hinter der KAN abgewiesene Rufe".

Für $\gamma^{(m)}(i,j)$ gilt entsprechend Gl.(II.4.1):

$$\gamma^{(m)}(i,j) = \sum_{\omega^{(m)} \in \Omega_{KANm}} v_{ij} \cdot P^{(m)}(\omega^{(m)}) \quad (III.6.7)$$

Aufgrund von Gl.(II.4.2) erhält man, wenn man $\phi_{..}$ gemäß Gl.(II.2.12) für den vorliegenden Fall bestimmt:

$$c_L^{(m)}(i,j) = \sum_{\omega^{(m)} \in \Omega_{KANm}} G_{mi}(x_{Zi}) \cdot p_{mij}^* \cdot \mu_{mj}(x_{Aj}) \cdot \xi_{mj}(x_{Aj}) \cdot P^{(m)}(\omega^{(m)}) \quad (III.6.8)$$

Weiter gilt gemäß Abschn. II.4.1:

$$c_V^{(m)}(i,j) = \sum_{\omega^{(m)} \in \Omega_{KANm}} G_{mi}(x_{Zi}) \cdot p_{mij}^* \cdot (1 - \mu_{mj}(x_{Aj})) \cdot P^{(m)}(\omega^{(m)}) \quad (III.6.9)$$

und

$$c_w^{(m)}(i,j) = \sum_{\omega^{(m)} \in \Omega_{KANm}} G_{mi}(x_{zi}) \cdot p_{mij}^* \cdot \mu_{mj}(x_{Aj}) \cdot (1 - \xi_{mj}(x_{Aj})) \cdot P^{(m)}(\omega^{(m)}) . \quad (\text{III.6.10})$$

Die Bild II.7 entsprechende graphische Darstellung ist in Bild III.9 angegeben.

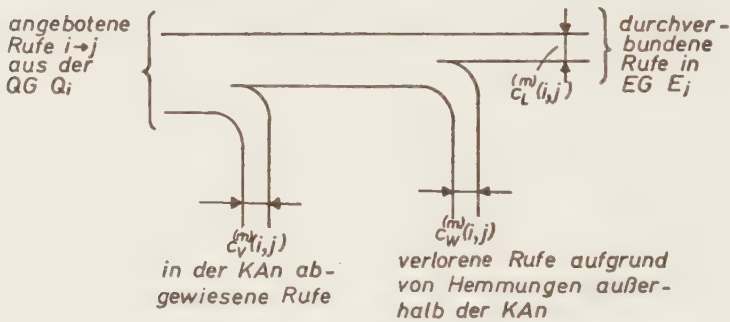


Bild III.9 Graphische Darstellung des Verkehrsflusses vom Zubringerbündel Nr. i zum Abnehmerbündel Nr. j

Die mittlere Zahl gleichzeitig belegter Leitungen im i -ten Zubringerbündel der KAN Nr. m ist dann gemäß Abschn. II.4.2

$$v^{(m)}(i) = \sum_{j=1}^{r_m} v^{(m)}(i,j) . \quad (\text{III.6.11})$$

Die mittlere Zahl der pro Zeiteinheit an der KAN Nr. m im i -ten Zubringerbündel ankommenden Rufe sei mit $c_A^{(m)}(i)$ bezeichnet. Gemäß Bild III.9 gilt:

$$c_A^{(m)}(i) = \sum_{j=1}^{r_m} (c_L^{(m)}(i,j) + c_V^{(m)}(i,j) + c_W^{(m)}(i,j)) . \quad (\text{III.6.12})$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein im i -ten Zubringerbündel der KAN Nr. m ankommender Ruf in dieser KAN abgewiesen wird, ist entsprechend Abschn. II.4.2

$$B_V^{(m)}(i) = \frac{\sum_{j=1}^{r_m} c_V^{(m)}(i,j)}{c_A^{(m)}(i)} . \quad (\text{III.6.13})$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein im i -ten Zubringerbündel der KAN Nr. m ankommender Ruf in dieser KAN oder in seinem späteren Verlauf abgewiesen wird (Gesamtverlust) ist:

$$B_{\text{ges}}^{(m)}(i) = \frac{\sum_{j=1}^{r_m} [c_V^{(m)}(i,j) + c_W^{(m)}(i,j)]}{c_A^{(m)}(i)} . \quad (\text{III.6.14})$$

Die mittlere Zahl der pro Zeiteinheit im i -ten Zubringerbündel der KAN Nr. m ankommenden Rufe, multipliziert mit der mittleren Gesprächsdauer $1/\varepsilon$ ergibt das im i -ten Zubringerbündel ankommende "Verkehrsangebot". Diese Größe sei mit $A^{(m)}(i)$ bezeichnet:

$$A^{(m)}(i) = \frac{c_A^{(m)}(i)}{\varepsilon} . \quad (\text{III.6.15})$$

III. 7 Ein Algorithmus zur schnelleren numerischen Berechnung der Betriebsbedingungen

Sind die in Abschn. III.5.1 angegebenen Voraussetzungen erfüllt, dann können die Betriebsbedingungen jeder KAN der VSt durch Quell- und Hemmungsfunktionen beschrieben werden (siehe Abschn. III.5.2). Hier wird nun ein Algorithmus hergeleitet, der es erlaubt, die numerischen Werte der Quell- und Hemmungsfunktionen und auch die der Verkehrsgrößen der KAN'en schneller als mit den allgemeinen Formeln von Abschn. III.4.4 und III.3.4 bzw. II.4 zu berechnen.

III. 7.1 Quellfunktion bzw. Hemmungsfunktion bei der Abspaltung einzelner Koppelanordnungen

Es werden VSt'n der im Abschn. III.5.2 beschriebenen Klasse betrachtet. Die Betriebsbedingungen ihrer KAN'en sind beschrieben durch die mittlere Enderate ε , die Richtungswahrscheinlichkeiten ρ_{mij}^* , die Quellfunktionen $G_{mi}(x)$ und die Hemmungsfunktionen $\xi_{mj}(x)$. ε ist eine vorgegebene Größe. ρ_{mij}^* berechnet sich aus den vorgegebenen Werten von ρ_{ij} gemäß Gl.(III.5.5). Zur Berechnung der numerischen Werte der Funktionen $G_{mi}(x)$, $i=1, \dots, s_m$ und $\xi_{mj}(x)$, $j=1, \dots, r_m$ können die Gl.'en (III.4.12a,b) bzw. (III.3.12a,b) verwendet werden.

$G_{mi}(x)$ bzw. $\xi_{mj}(x)$ beschreiben "abgespaltene" Teile der VSt. In den beiden eben genannten Formeln nimmt die Zahl der Terme in Nenner und Zähler sehr stark mit der im abgespaltenen Teil enthaltenen Zahl von KAN'en, Leitungsbündel, Leitungszahlen der Bündel usw. zu. Je größer nämlich ein abgespaltener Teil ist, um so mehr Elemente enthalten die Mengen Ω_1^x bzw. Ω_2^x und um so mehr Terme stehen also in Zähler und Nenner. Außerdem nimmt die Zahl der Faktoren, aus denen jeder Term besteht, mit der Größe des abgespaltenen Teils zu. Zur Berechnung eines Funktionswertes

einer Quell- oder Hemmungsfunktion sind also um so mehr Rechenoperationen (Addition, Multiplikation,...) notwendig, je größer der abgespaltete Teil ist. Die Zeit zur Berechnung eines Funktionswertes nimmt insgesamt überproportional mit der Größe des abgespalteten Teils zu.

Daher liegt es nahe zu untersuchen, ob man die Funktionswerte nicht durch mehrmaliges Abspalten kleiner Teile berechnen kann. Wenn dies gelänge, hätte man insgesamt eine kürzere Rechenzeit zu erwarten als bei der Anwendung der Formeln (III.3.12a,b) bzw. (III.4.12a,b).

Dies ist tatsächlich möglich. Man nützt dazu die Tatsache aus, daß einerseits die Hemmungsfunktionen ausschließlich durch die Parameter des abgespaltenen angerufenen Teils bestimmt sind (vergl. Abschn. III.3.4), und andererseits die Quellfunktionen ausschließlich durch die Parameter des abgespaltenen rufenden Teils der VSt bestimmt sind (vergl. Abschn. III.4.4). Die kleinsten Teile, die man sinnvollerweise abspalten kann, enthalten jeweils nur eine KAN.

Als erstes sei der Fall betrachtet, daß der abgespaltene Teil ein angerufener Teil ist. Er bestehe nur aus der KAN Nummer m . Das bei der Abspaltung zu "durchschneidende" Bündel sei das i -te Zubringerbündel dieser KAN. Die die so abgespaltene KAN beschreibende Hemmungsfunktion sei mit $\xi_{zmi}(x)$ bezeichnet (vergl. Bild III.10). Dann lautet Gl.(III.3.12a,b) nach einer einfachen Umformung

$$\xi_{zmi}(x) = \frac{\sum_{\omega^{(m)} \in \Omega_{zmi}^x} \left[\sum_{j=1}^{r_m} \rho_{mij}^* \mu_{mj}(x_{Aj}) \cdot \xi_{mj}(x_{Aj}) \right] \cdot F^*(\omega^{(m)})}{\sum_{\omega^{(m)} \in \Omega_{zmi}^x} F^*(\omega^{(m)})} \quad \left. \begin{array}{l} \text{für } x \geq 0, \\ \\ \text{für } x < 0, \end{array} \right\}$$

$$= 0$$

(III.7.1a)

mit folgender Abkürzung:

$$F^*(\omega^{(m)}) = \left[\prod_{i=1}^{s_m} \prod_{j=1}^{r_m} \left(\frac{\rho_{mij}^*}{v_{ij}} \right)^{v_{ij}} \right] \left[\prod_{k=1, \dots, s_m}^{k \neq i} \left[\frac{x_{zk}^{-1}}{\prod_{v=0}^{x_{zk}-1} G_{mk}(v)} \right] \right] \left[\prod_{j=1}^{r_m} \left[\frac{x_{Aj}^{-1}}{\prod_{v=0}^{x_{Aj}-1} \mu_{mj}(v) \cdot \xi_{mj}(v)} \right] \right] . \quad (\text{III.7.1b})$$

Hierin ist Ω_{zm}^x die Menge all derjenigen Zehlentupel $\omega^{(m)}$, die einen Belegungszustand der KAN Nr. m mit x belegten Leitungen im i -ten Zubringerbündel darstellen. Betreffs $\mu_{mj}(x)$ siehe Gl.(III.6.4), betreffs x_{Aj} Gl.(III.6.3) und betreffs x_{zi} Gl.(III.6.2).

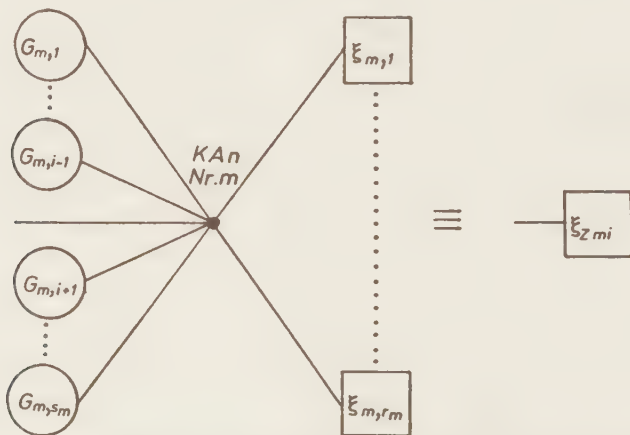


Bild III.10 Hemmungsfunktion für eine abgespaltene KAN
(Fall: Die KAN stellt einen angerufenen Teil einer VSt dar)

Wenn man G_{mi} stellvertretend für alle Funktionswerte der Quellfunktion $G_{mi}(x)$ schreibt und ξ_{mj} für die

der Hemmungsfunktion $\xi_{mj}(x)$, dann kann man $\xi_{Zm;}(x)$ von Gl.(III.7.1a,b) als Funktion folgender Argumente auffassen:

$$\xi_{Zm;}(x) = fkt(G_{m,1}, \dots, G_{m,j-1}, G_{m,j+1}, \dots, G_{m,s_m}; \xi_{m,1}, \dots, \xi_{m,r_m}) . \quad (\text{III.7.2})$$

Daß Hemmungsfunktionen ausschließlich von den Parametern der abgespaltenen angerufenen Teile abhängen, kommt hier dadurch zum Ausdruck, daß in Gl.(III.7.2) das Argument G_m nicht auftritt.

Nun sei der Fall betrachtet, daß der abgespaltene Teil ein rufender Teil ist. Die enthaltene KAN habe wieder die Nummer m . Das bei der Abspaltung zu "durchschneidende" Bündel sei

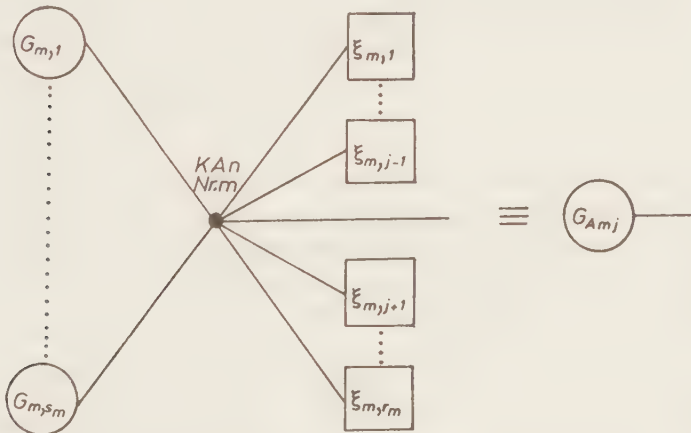


Bild III.11 Quellfunktion für eine abgespaltene KAN
(Fall: Die KAN stellt einen rufenden Teil einer VSt dar)

das j -te Abnehmerbündel der KAN. Die Quellfunktion, die die so abgespaltene KAN beschreibt, sei mit $G_{Amj}(x)$ bezeichnet (vergl. Bild III.11). Damit lautet Gl.(III.4.12a,b) nach einer einfachen Umformung

$$G_{Amj}(x) = \left. \begin{aligned} & \frac{\sum_{\omega^{(m)} \in \Omega_{Amj}^x} \left[\sum_{i=1}^{s_m} \rho_{mij}^* \cdot G_{mi}(x_{zi}) \cdot F^{**}(\omega^{(m)}) \right]}{\sum_{\omega^{(m)} \in \Omega_{Amj}^x} F^{**}(\omega^{(m)})} \cdot \mu_{mj}(x) \quad \text{für } x \geq 0, \\ & = 0 \quad \text{für } x < 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.7.3a})$$

mit folgender Abkürzung:

$$F^{**}(\omega^{(m)}) = \left[\prod_{i=1}^{s_m} \prod_{j=1}^{r_m} \frac{(\rho_{mij}^*)^{v_{ij}}}{v_{ij}!} \right] \cdot \left[\prod_{i=1}^{s_m} \left[\prod_{\nu=0}^{x_{zi}-1} G_{mi}(\nu) \right] \right] \cdot \left[\prod_{\substack{k=1, \dots, r_m \\ k \neq j}} \left[\prod_{\nu=0}^{x_{Aj}-1} \mu_{mk}(\nu) \cdot \xi_{mk}(\nu) \right] \right]. \quad (\text{III.7.3b})$$

Hierin ist Ω_{Amj}^x die Menge all der Zahlentupel $\omega^{(m)}$, die einen Belegungszustand der KAN Nr. m mit x belegten Leitungen im j -ten Abnehmerbündel darstellen. Betreffs $\mu_{mj}(x)$ siehe Gl. (III.6.4), betreffs x_{Aj} Gl. (III.6.3) und betreffs x_{zi} Gl. (III.6.2).

Die zu Gl. (III.7.2) analoge Darstellung der Quellfunktion $G_{Amj}(x)$ lautet:

$$G_{Amj}(x) = fkt(G_{m,1}, \dots, G_{m,s_m}; \xi_{m,1}, \dots, \xi_{m,j-1}, \xi_{m,j+1}, \dots, \xi_{m,r_m}). \quad (\text{III.7.4})$$

Daß Quellfunktionen ausschließlich von den Parametern des abgespalteten rufenden Teils abhängen, kommt hier dadurch

zum Ausdruck, daß in Gl.(III.7.4) das Argument ξ_{mj} nicht auftritt.

III. 7.2 Der Algorithmus

Im folgenden wird ausgenutzt, daß (vergl. Gl.(III.7.2)) $\xi_{Zm_i}(x)$ nicht von G_{m_i} abhängt und daß (vergl. Gl.(III.7.4)) $G_{Am_j}(x)$ nicht von ξ_{m_i} abhängt. Daraus folgt, daß einerseits die numerischen Werte der Funktion $\xi_{Zm_i}(x)$ bereits dann berechnet werden können, wenn die numerischen Werte der Quellfunktion $G_{m_i}(x)$ noch gar nicht bekannt sind. Die Quellfunktionen für die an allen anderen Zubringerbündeln ankommenden Rufe müssen natürlich bekannt sein, desgleichen alle Hemmungsfunktionen. Andererseits können die numerischen Werte der Funktion $G_{Am_j}(x)$ bereits dann berechnet werden, wenn numerische Werte der Hemmungsfunktion $\xi_{m_j}(x)$ noch gar nicht bekannt sind. Damit ist es möglich, die $G_{m_i}(x)$ und $\xi_{m_j}(x)$ aller KAN'en durch mehrmalige Verwendung der Formeln (III.7.3a,b) und (III.7.1a,b), also ohne Verwendung der Formeln (III.4.12a,b), (III.3.12a,b) zu berechnen.

Dies sei am Beispiel der VSt von Bild III.6 gezeigt. Dabei sei vorweg bemerkt, daß die Rechenschritte in diesem Beispiel dieselben wären, wenn die KAN'en Nr. 12, 3, 5, 7, 15 jeweils nicht nur von einer, sondern von mehreren QG'n mit Rufen beliefert werden würden. Genauso würde es nichts ausmachen, wenn die KAN'en Nr. 2, 8, 9, 15 jeweils mehrere und nicht nur eine abgehende Richtung hätten. Diese weitere Verallgemeinerung des Beispiels sei aber aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht gemacht.

Die mittleren Anrufraten der $s = 5$ QG'n seien mit $\lambda_1(x), \dots, \lambda_5(x)$ bezeichnet und die Freiwahrscheinlichkeiten der $r = 4$ EG'n mit $\gamma_1(x), \dots, \gamma_4(x)$. Es ist $u = 10$ die Zahl der KAN'en in diesem Beispiel. Die VSt ist in Bild III.12a dargestellt. Die Berechnung verläuft in folgenden Schritten:

Schritt 1: Die KAN'en Nr. 12, 3, 5 und 8, 9, 15 werden abgespalten und durch Quellfunktionen bzw. Hemmungsfunktionen ersetzt. Es ist $G_{2,1} = G_{A12,1}$,
 $G_{4,1} = G_{A3,1}$, $G_{6,2} = G_{A5,1}$, $\xi_{6,1} = \xi_{Z8,1}$, $\xi_{6,2} = \xi_{Z9,1}$,
 $\xi_{7,2} = \xi_{Z15,1}$; siehe Bild III.12b.

Schritt 2: Die KAN'en Nr. 2 und Nr. 7 werden vom verbliebenen System abgespalten und durch die Hemmungsfunktion $\xi_{Z2,2}$ bzw. die Quellfunktion $G_{A7,1}$ ersetzt; siehe Bild III.12c.*)

Schritt 3: Jetzt werden die KAN'en Nr. 4 und Nr. 6 getrennt. Bezüglich KAN Nr. 4 wird die KAN Nr. 6 durch die Hemmungsfunktion $\xi_{Z6,1}$ ersetzt. Bezüglich KAN Nr. 6 wird die KAN Nr. 4 durch die Quellfunktion $G_{A4,2}$ ersetzt; siehe Bild III.12d.

Schritt 4: An den KAN'en Nr. 4 und Nr. 6 sind nun jeweils alle Quell- und Hemmungsfunktionen bekannt. Damit können für die KAN'en Nr. 3, 5, 7 die Hemmungsfunktionen für die von ihnen abgehenden Rufe berechnet werden. Für die KAN'en Nr. 2, 8, 9 können die Quellfunktionen der ankommenden Rufströme berechnet werden; siehe Bild III.12e.

Schritt 5: Nun kann für die KAN Nr. 12 die noch fehlende Hemmungsfunktion berechnet werden und für KAN Nr. 15 die noch fehlende Quellfunktion; siehe Bild III.12f.

*) In den Bildern III.12b bis III.12f sind der Deutlichkeit halber in den Kreisen bzw. Rechtecken nur die im jeweiligen Schritt berechneten Funktionen angegeben. Für die in früheren Schritten berechneten Funktionen werden die Kreise bzw. Rechtecke leer gelassen.

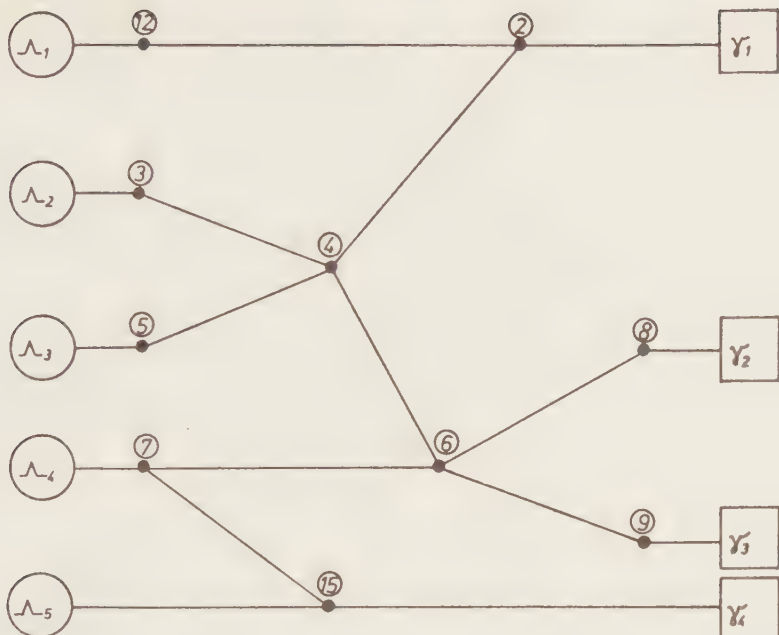


Bild III.12a Beispiel einer VSt mit $s=5, r=4, u=10$

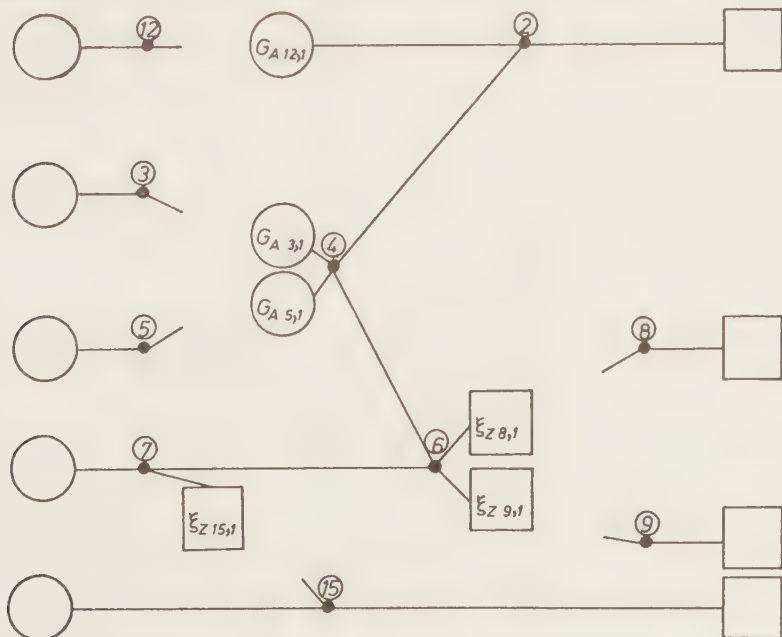


Bild 12b Schritt 1

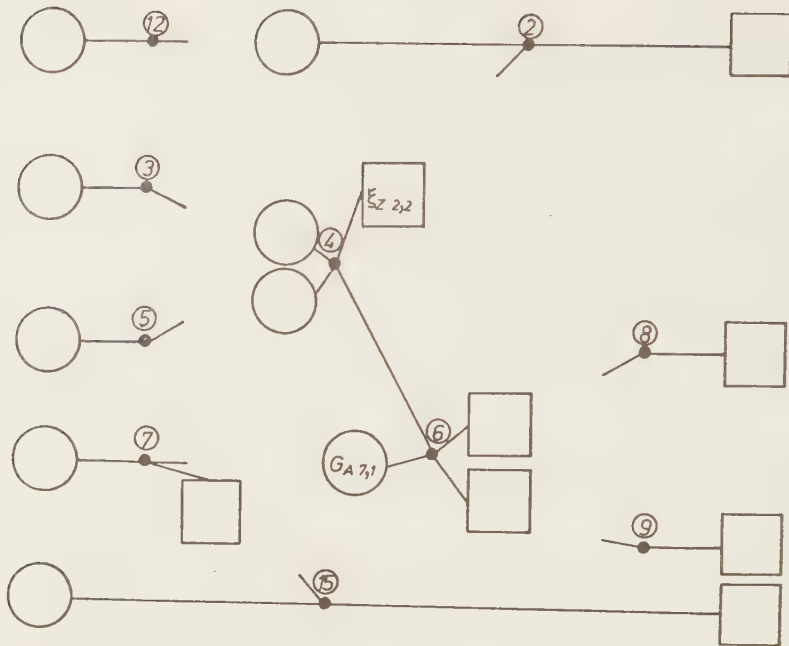


Bild III.12c Schritt 2

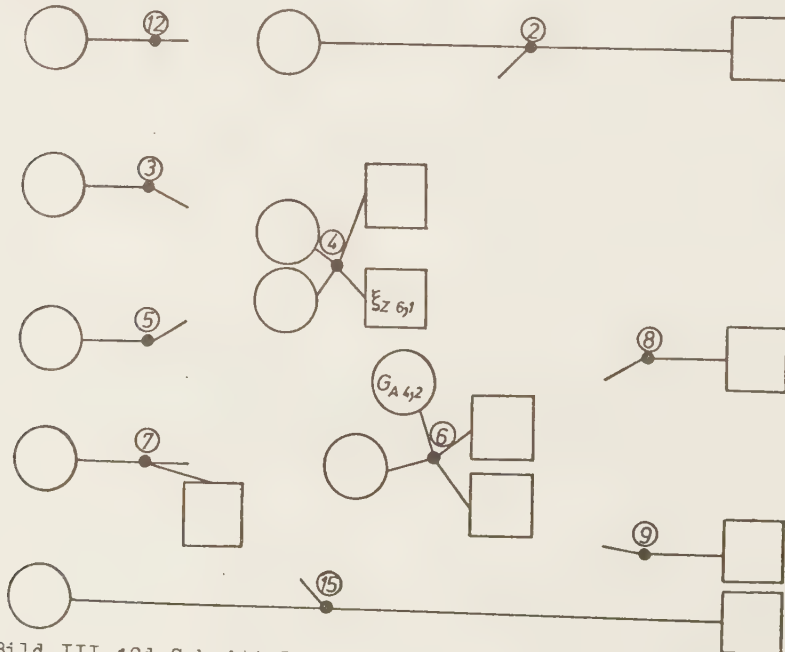


Bild III.12d Schritt 3

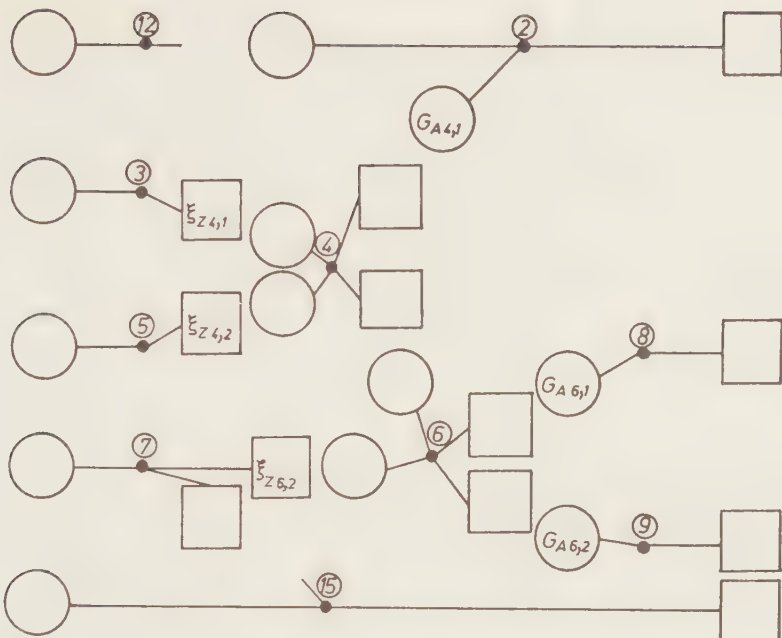


Bild III.12e Schritt 4

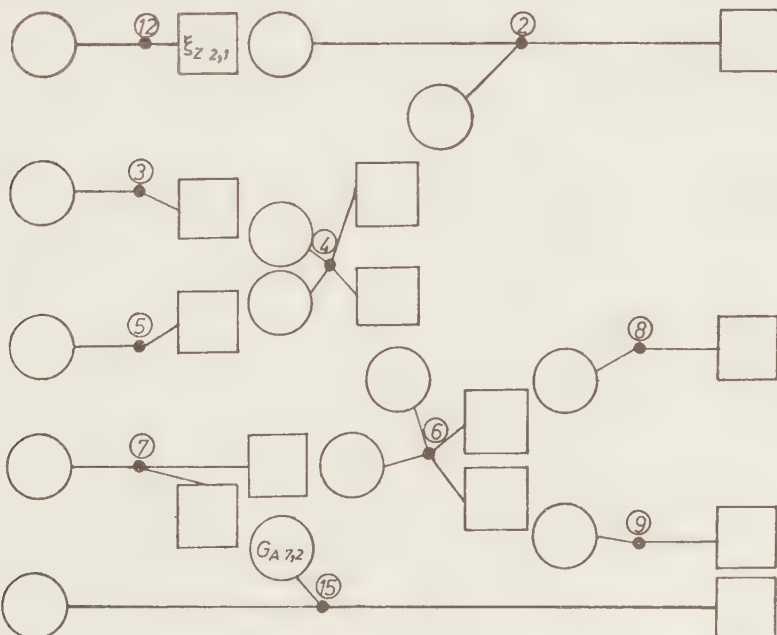


Bild III.12f Schritt 5

Wie man leicht einsieht, ist die Anwendung des Verfahrens immer möglich, wenn eine Fächerstruktur vorliegt. Man hat nach folgendem Algorithmus vorzugehen: Man beginnt mit der Abspaltung der "außen" liegenden KAN'en. Dann spaltet man die im so entstandenen Restsystem "außen" liegenden KAN'en ab usw. (vergl. Bild III.12b,c). Ist man bei den "innersten" KAN'en angelangt (vergl. Bild III.12d), dann hat man zum erstenmal KAN'en erreicht, für die alle G_{mi} und ξ_{mj} bekannt sind. Vor hier ausgehend kann man, sozusagen von innen nach außen, alle nun noch fehlenden Quell- und Hemmungsfunktionen berechnen (vergl. Bild III.12e,f).

Anmerkung:

Die Programmierung dieses Algorithmus's für eine elektronische Rechenanlage ist sehr einfach. Das Programm muß lediglich Buch darüber führen, welche Quell- und Hemmungsfunktionen G_{mi} und ξ_{mj} schon berechnet sind. Es muß weiter noch entscheiden können, ob an einer KAN schon genügend viele G_{mi} und ξ_{mj} bekannt sind, um eine noch unbekannte Funktion ξ_{zmi} oder G_{amj} auszurechnen (mittels Gl.(III.7.1a,b) bzw. Gl.(III.7.3a,b)). Das Programm hat nun an allen KAN'en immer wieder zu versuchen, noch unbekannte ξ_{zmi} und G_{amj} auszurechnen. Nachdem mehrmals alle KAN'en "abgesucht" sind, wird ein Zeitpunkt erreicht, zu dem an jeder KAN alle Quell- und Hemmungsfunktionen bekannt sind. Daß dabei evtl. einige Suchschritte mehr ausgeführt werden als bei Durchführung des Algorithmus's von Hand, spielt bei einer elektronischen Rechenanlage kaum eine Rolle.

Damit ist ein Verfahren gefunden, das, wie Beispiele zeigen, die numerische Berechnung der G_{mi} und ξ_{mj} aller KAN'en der VSt mit wesentlich geringerem Zeitaufwand ermöglicht als mit den allgemeinen Formeln (III.4.12a,b) bzw. (III.3.12a,b).

III. 7.3 Vereinfachungen

Es seien noch zwei oft vorkommende Sonderfälle erwähnt, die Vereinfachungen ermöglichen.

- 1.) Der erste Sonderfall sind KAN'en mit nur je einem Zubringerbündel und einem Abnehmerbündel. Solche KAN'en kommen oft im Konzentrationsabschnitt von VSt'n vor.

Für solche KAn'en lautet Gl.(III.7.3a):

$$G_{Am1}(x) = G_{m1}(x) \cdot \mu_{m1}(x) \quad , \quad (\text{III.7.5})$$

und Gl.(III.7.1a) lautet:

$$\xi_{zm1}(x) = \mu_{m1}(x) \cdot \xi_{m1}(x) \quad . \quad (\text{III.7.6})$$

2.) Der zweite Sonderfall betrifft Leitungswahlstufen. Diese sind die letzten KAn'en im Verbindungsaufbau. Es sind KAn'en, deren abgehende Bündel nur je eine Leitung haben. Meist liegt der Fall vor, daß die Leitungswahlstufe nur ein einziges Zubringerbündel hat, alle EG'n dieselbe Freiwehrscheinlichkeit haben und für p_{mj}^* folgendes gilt:

$$p_{mj}^* = 1/r_m \quad \forall j \quad . \quad (\text{III.7.7})$$

Diese Gleichung bedeutet, daß die an der Leitungswahlstufe ankommenden Rufe alle (an diese KAn angeschlossenen) Teilnehmer mit gleicher Wahrscheinlichkeit wünschen. Damit wird aus Gl.(III.7.1a):

$$\xi_{zm1}(x) = \gamma_0 \cdot \frac{r_m - x}{r_m} \quad . \quad (\text{III.7.8})$$

Hierin bedeutet (wegen $n_{Aj} = 1$ für $j = 1, \dots, r_m$) die Zahl r_m gleichzeitig die Anzahl der abgehenden Leitungen der Leitungswahlstufe und die Zahl der abgehenden Richtungen. Die Größe γ_0 ist der (einzige) Funktionswert der Freiwehrscheinlichkeit der an die Leitungswahlstufe angeschlossenen EG'n, die je aus nur einem Endabnehmer bestehen.

Gl.(III.7.8) kann man, was in vielen Fällen bei der numerischen Rechnung eine Erleichterung bedeutet, wie folgt umdeuten: Es sei eine KAn mit vollkommener Erreichbarkeit

und je einem Zubringer- und Abnehmerbündel betrachtet. Die Leitungszahl des Abnehmerbündels sei gleich r_m . Das Abnehmerbündel führe zu einer EG, für deren Freiwahrscheinlichkeit $\gamma(x)$ gelten soll:

$$\gamma(x) = \gamma_0 \cdot \frac{r_m - x}{r_m} \quad . \quad (\text{III.7.9})$$

Für eine solche KAn berechnet sich $\xi_{zm}(x)$ gemäß Gl.(III.7.6) zu:

$$\xi_{zm}(x) = \mu_{m1}(x) \cdot \gamma(x) \quad . \quad (\text{III.7.10})$$

Hierin ist $\mu_{m1}(x)$ eine Rechteckfunktion gemäß Gl.(III.6.4). Die rechten Seiten der Gl.'en (III.7.8) und (III.7.10) sind identisch. Also kann man die Leitungswahlstufe durch die eben besprochene KAn ersetzen (siehe Bild III.13).

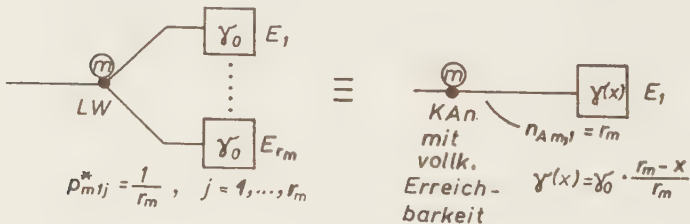


Bild III.13 Umdeutung einer Leitungswahlstufe mit gleichwahrscheinlich gewünschten Teilnehmern, deren Freiwahrscheinlichkeiten identisch sind

III. 8 Unvollkommene Erreichbarkeit

Wie in den Abschnitten II.1 bis II.4 wurde auch in den Abschnitten III.1 bis III.7 nirgends davon Gebrauch gemacht, daß die Funktionen $\mu_i(x)$ bzw. $\mu_{mj}(x)$ - entsprechend den Definitionen (II.2.5) bzw. (III.6.4) - Rechteckfunktionen sind. Vielmehr sind alle Rechnungen der Abschnitte III.1 bis III.7 auch dann richtig, wenn die μ -Funktionen Durchlaßwahrscheinlichkeiten darstellen. Es genügt also, wenn $\mu_i(x)$ statt der Gl.(II.2.5) die weniger einschränkende Gl.(II.5.1) erfüllt, bzw. $\mu_{mj}(x)$ statt der Gl.(III.6.4) nur die folgende Gleichung erfüllt:

$$\left. \begin{aligned} 0 < \mu_{mj}(x) \leq 1 & \quad \text{für} \quad 0 \leq x < n_{Amj}, \\ \mu_{mj}(x) &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.8.1})$$

Damit dürfen - vergl. Abschnitt II.5 - auch KAN'en vorkommen, die unvollkommene Erreichbarkeit haben. Sie müssen jedoch dann durch das Modell der Durchlaßwahrscheinlichkeiten beschreibbar sein, das für einstufige KAN'en oft verwendet wird. Ist das j-te Richtungsbündel der KAN Nr. m ein "vollkommen erreichbares Bündel", dann gilt für $\mu_{mj}(x)$ die Definition (III.6.4); $\mu_{mj}(x)$ ist also eine Rechteckfunktion. Ist das j-te Richtungsbündel der KAN Nr. m ein "unvollkommen erreichbares Bündel", dann ist $\mu_{mj}(x)$ eine Durchlaßwahrscheinlichkeit und genügt der Gl.(III.8.1). Es ist die Durchlaßwahrscheinlichkeit derjenigen Mischung, über die in der KAN Nr. m die Rufe ins j-te Richtungsbündel gehen.

III. 9 Praktische Erfahrungen und ein Beispiel

In diesem Abschnitt wird über praktische Erfahrungen bei der Anwendung der in Teil II und Teil III entwickelten Verfahren berichtet und ein Beispiel vorgeführt.

III. 9.1 Praktische Erfahrungen

Es wurden Rechenprogramme in den Programmiersprachen ALGOL 60 und FORTRAN IV für die elektronische Rechenanlage TR 4 (Fa. Telefunken) für folgende Zwecke erstellt:

Programm 1 Berechnung der Verkehrsgrößen aller KAN'en für VSt'n der in Abschn. II.1 beschriebenen Klasse. Die Erweiterung gemäß Abschn. II.5 ist eingeschlossen. Es werden die Formel (II.3.10) für die (nichtnormierten) Zustandswahrscheinlichkeiten und die Formeln von Abschn. II.4 für die Verkehrsgrößen verwendet.

Programm 2 Berechnung der Verkehrsgrößen aller KAN'en für VSt'n der in Abschn. III.5.2 beschriebenen Klasse. Die Erweiterung gemäß Abschn. III.8 ist eingeschlossen. Diese VSt'n haben gegenüber den im Programm 1 behandelten einheitliche mittlere Enderate aller Gespräche und erfüllen eine leicht vereinfachende Voraussetzung bezüglich der Aufteilungswahrscheinlichkeiten. Die Berechnung der Verkehrsgrößen geschieht so, daß zuerst die Quell- und Hemmungsfunktionen aller KAN'en gemäß des in Abschn. III.7 angegebenen Algorithmus berechnet werden und dann die Verkehrsgrößen gemäß Abschn. III.6 bestimmt werden.

Es wurde eine größere Reihe von VSt'n mit bis zu 13 KAN'en durchgerechnet. Dabei zeigte sich, daß die Rechenzeit bei Programm 1 sehr stark mit der Zahl der Belegungszustände der VSt, also der Zahl der in Ω enthaltenen ω zunimmt. Bei $10^4 \dots 10^5$ Zuständen (also maximal 6 bis 8 KAN'en und 3 bis 6 Leitungen pro Bündel) sind eine bis mehrere Stunden Rechenzeit an der Anlage TR 4 erforderlich. Programm 2 benötigt für VSt'n dieser Größe nur einige Minuten.

Mit Programm 2 lassen sich wesentlich größere VSt'n berechnen als mit Programm 1. Entscheidend ist hier die-

jenige KAN, die die höchste Anzahl von Belegungszuständen hat. Da meistens eine KAN alle anderen KAN'en der VSt in der Zahl der Zustände deutlich überragt, bestimmt sie den Rechenzeitaufwand. Die Gesamtzahl der KAN'en spielt keine große Rolle und kann daher vergleichsweise groß sein. Wenn die "größte" KAN $10^4 \dots 10^5$ Belegungszustände hat (Beispiel: Zahl der Zubringerbündel plus Zahl der Abnehmerbündel ca. 4 bis 6 und maximal 4 bis 6 Leitungen pro Bündel), ergeben sich bei Programm 2 Rechenzeiten von einigen Stunden auf der Anlage TR 4.

Die Beispiele zeigen selbstverständlich - bis auf eventuelle Rundungsfehler der Rechenanlage - vollkommene Übereinstimmung zwischen den mit Programm 1 und Programm 2 berechneten Werten. Für die gerechneten Beispiele wurden der Vollständigkeit halber Simulationen der jeweiligen VSt auf der Rechenanlage TR 4 unter Verwendung der Ruf- und Löschzahlmethode durchgeführt. Deren Ergebnisse bestätigen die mit den Programmen 1 und 2 gefundenen Ergebnisse.

Zu den Programmen sei noch bemerkt, daß noch keine Versuche gemacht wurden, um die Rechenzeit zu optimieren. Man kann erwarten, daß durch geeignete programmiertechnische Maßnahmen die Rechenzeiten gesenkt werden können.

An den gerechneten Beispielen konnten folgende interessante Beobachtungen gemacht werden: Erleiden die von einer KAN abgehenden Rufe im weiteren Verlauf noch Hemmungen, dann sind die Verluste in der KAN kleiner, als wenn die abgehenden Rufe keine Hemmungen mehr erleiden. Kommen an einer KAN verschiedenen starke (geglättete) Rufströme an, dann erleiden in ihr die schwächeren Ströme größere Verluste als die starken Ströme. Werden einer VSt zunächst Zufallsverkehre zweiter Art angeboten und dann Zufallsverkehre erster Art mit denselben Werten der Angebote, dann stellen sich in den nahe bei den

Quellen gelegenen KAN'en höhere Verluste ein, während die Verluste in den anderen (später durchlaufenen) KAN'en etwa gleich bleiben. Vernachlässigt man bei der Berechnung des Verlusts in einer KAN die Hemmungen, die die abgehenden Rufe erfahren, dann kann u.U. ein größerer Rechenfehler entstehen, als wenn man die Erzeugung der ankommenden geglätteten Verkehrsströme vereinfachend durch Zufallsverkehre erster Art mit gleichen Werten der Angebote beschreibt, die Hemmungen, die die abgehenden Rufe im weiteren Verlauf noch erfahren, aber berücksichtigt.

Die hier entwickelten Rechenverfahren sind exakte Verfahren. Die Genauigkeit der Ergebnisse wird von numerischen Werten der Parameter bis auf maschinenbedingte Rundungsfehler nicht beeinflusst. Darin liegt ein großer Vorteil gegenüber den meist einfach zu handhabenden Näherungsverfahren, wie z.B. das im "Überblick" erwähnte Verfahren der abschnittsweisen Rechnung. Diese sind meist nur auf gewisse typische Verkehrssituationen anwendbar, z.B. auf schwachen Verkehr, der nur geringe Verluste in den einzelnen KAN'en erleidet. Für andere Verkehrssituationen, z.B. starken Verkehr, entstehen schwer abzuschätzende Fehler. Der Grund ist z.B., daß dann gewisse Annahmen über Unabhängigkeiten usw. auch nicht mehr näherungsweise erfüllt sind.

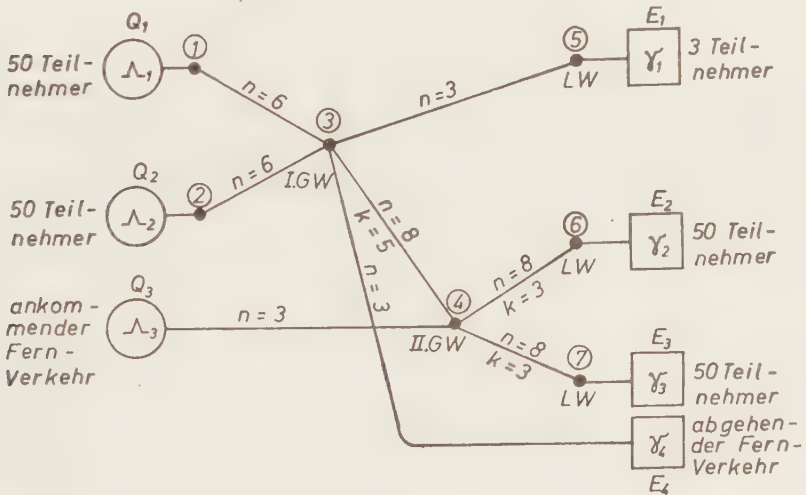
Exakte Verfahren haben meist den Nachteil, daß die Größe der mit ihnen numerisch noch berechenbaren Systeme mehr oder weniger beschränkt ist. Das gilt auch für die hier beschriebenen neuen Verfahren. Sie legen jedoch den mathematischen Charakter des Problems klar und können damit als Ausgangspunkt zur Entwicklung wohl fundierter Näherungslösungen für große Systeme verwendet werden.

III. 9. 2 Ein Beispiel

Es wird eine aus 7 KAN'en bestehende VSt betrachtet, die zur Klasse der VSt'n von Abschn. III.5.2 gehört. Sie

bedient 100 Teilnehmer und hat Verbindungen zu einem übergeordneten (Fern-)Netz. Zur Berechnung der Verkehrsgrößen wird Programm 2 (siehe Abschn. III.9.1) verwendet.

Die VSt ist in Bild III.14 dargestellt. Dabei ist für die Leitungswahlstufen (KAN'en Nr. 5, 6, 7) die vereinfachte Darstellung gemäß Bild III.13 verwendet. Es wird also vorausgesetzt, daß die an eine Leitungswahlstufe angeschlossenen Teilnehmer jeweils gleichwahrscheinlich von den an der Leitungswahlstufe ankommenden Rufe gewünscht werden und gleiche Freiwahrscheinlichkeit haben.



Es bedeuten: n = Leitungszahl
 k = Erreichbarkeit im Falle unvollkommen erreichbarer Bündel

Bild III.14 Beispiel einer VSt für 100 Teilnehmer

Je 50 Teilnehmer bilden die Quellengruppen Q_1, Q_2 .
 Für die Erzeugung der Rufe wird das Modell "endliche

Quellenzahl" angenommen, also *):

$$\lambda_1(x)/\epsilon = 0.05 \cdot (50 - x) \quad , \quad (\text{III.9.1})$$

$$\lambda_2(x)/\epsilon = 0.07 \cdot (50 - x) \quad . \quad (\text{III.9.2})$$

Daneben gibt es noch eine dritte Quellengruppe Q_3 . Sie beschreibt den auf drei Leitungen aus dem übergeordneten Netz ankommenden Verkehr. Die mittlere Anrufrate dieser QG ist $\lambda_3(x)$, und es sei:

x	0	1	2	3
$\lambda_3(x)/\epsilon$	0.60	0.58	0.45	0

(III.9.3)

Auf der Ausgangsseite der VSt bilden je 50 Teilnehmer die EG'n E_2, E_3 . Die Freiwahrscheinlichkeit der Endabnehmervon E_2 sei $\gamma_{02} = 0.98$, die der von E_3 sei $\gamma_{03} = 0.96$. Für die vereinfachte Darstellung der Leitungswahlstufen (siehe Bild III.13) ergibt sich für die EG'n:

$$\gamma_2(x) = 0.98 \cdot \frac{50 - x}{50} \quad , \quad (\text{III.9.4})$$

$$\gamma_3(x) = 0.96 \cdot \frac{50 - x}{50} \quad . \quad (\text{III.9.5})$$

γ_{02} und γ_{03} wurden aus folgendem Grund nicht gleich 1 gesetzt: Es soll damit in Rechnung gestellt werden, daß angerufene Teilnehmer u.U. aufgrund eines selbst ausgesendeten Rufes sprechen und deshalb nicht angerufen werden können ("Teilnehmer abgehend belegt"). Die EG E_4 beschreibt das übergeordnete Netz als Empfänger der ab-

*) Wenn man - wie in diesem Beispiel - nur Angebote, Belastungen und Verluste berechnen will, genügt es, den Wert des Quotienten λ/ϵ anzugeben. Der Wert von ϵ braucht nicht angegeben zu werden.

gehenden Fernrufe. Die Freiwahrscheinlichkeit $\gamma_4(x)$ ist in der folgenden Tabelle gegeben:

x	0	1	2	3
$\gamma_4(x)$	0.96	0.95	0.93	0

(III.9.6)

Die EG E_1 soll die besonderen Dienste (Zeitanzeige, Wetter, usw.) darstellen, die in VSt'n meist vorhanden sind, und es sei

$$\gamma_1(x) = \frac{3-x}{3} \quad . \quad (III.9.7)$$

Dazu sei angemerkt, daß die EG E_1 nur als Beispiel gelten soll. In der Praxis wird man einer VSt mit nur 100 Teilnehmern wohl keinen eigenen besonderen Dienst einrichten, sondern die besonderen Dienste größerer Ortsnetze über das Fernnetz anwählen.

Die Leitungszahlen aller Bündel sind in Bild III.14 angegeben. Die KAN'en sind einstufig und haben, von den nachfolgenden Ausnahmen abgesehen, vollkommene Erreichbarkeit in allen Richtungen: Unvollkommene Erreichbarkeit haben die abgehende Richtung 2 der KAN Nr. 3 und die abgehenden Richtungen 1 und 2 der KAN Nr. 4. Für die Durchlaßwahrscheinlichkeiten der betreffenden Mischungen soll gelten:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{mj}(x) &= 1 && \text{für } x=0, \dots, k_{mj}-1, \\ &= 1 - \frac{\binom{x}{k_{mj}}}{\binom{n_{Amj}}{k_{mj}}} && \text{für } x=k_{mj}, \dots, n_{Amj}, \end{aligned} \right\} \quad (III.9.8a)$$

wobei gemäß Bild III.14 folgende Werte für k_{mj} und n_{Amj} gelten:

$$\left. \begin{array}{l} n_{A3,2} = 8, \quad k_{3,2} = 5 \\ n_{A4,1} = 8, \quad k_{4,1} = 3 \\ n_{A4,2} = 8, \quad k_{4,2} = 3 \end{array} \right\} \quad (\text{III.9.8b})$$

Die in Gl.(III.9.8a,b) nicht genannten μ -Funktionen beschreiben vollkommen erreichbare Bündel; für sie gilt gemäß Gl.(III.6.4):

$$\left. \begin{array}{l} \mu_{mj}(x) = 1 \quad \text{für } 0 \leq x < n_{Amj}, \\ \quad \quad \quad = 0 \quad \text{sonst} \end{array} \right\} \quad (\text{III.9.9})$$

Für die Aufteilungswahrscheinlichkeiten p_{ij} sind folgende Werte vorgegeben:

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0.05	0.3825	0.4675	0.10
2	0.02	0.3735	0.4565	0.15
3	—	0.40	0.60	—

(III.9.10)

Wie man leicht prüfen kann, erfüllen diese Werte die Gl.(III.5.1), was eine notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit von Programm 2 ist (vergl. die Abschnitte III.9.1 und III.5.2).

Anmerkung: Es sei hier der Vollständigkeit halber ein Beispiel für Werte der Aufteilungswahrscheinlichkeiten angegeben, die die Voraussetzung (III.5.1) nicht erfüllen:

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0.05	0.40	0.45	0.10
2	0.02	0.30	0.53	0.15
3	—	0.40	0.60	—

In vielen Anwendungsfällen sind jedoch nicht die Werte von p_{ij} vorgegeben, sondern diejenigen von p_{mij}^* , so daß es entfällt, die Werte von p_{ij} auf Zulässigkeit zu kontrollieren und dann die Werte von p_{mij}^* daraus auszurechnen.

Damit sind alle nötigen Angaben über die VSt und die Teilnehmer gemacht. Der erste Schritt der Rechnung ist die Bestimmung der Richtungswahrscheinlichkeiten p_{mij}^* mittels Gl.(III.5.5). Das Ergebnis für die KAN'en Nr. 1, 2, 5, 6, 7 ist trivial, da sie nur je ein abgehendes Richtungs-bündel haben: $p_{mi1}^* = 1$. Für die KAN'en Nr. 3 und Nr. 4 ergibt sich:

p_{3ij}^*				p_{4ij}^*			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	
1	0.05	0.85	0.10	1	0.45	0.55	
2	0.02	0.83	0.15	2	0.40	0.60	.

Im zweiten Schritt der Rechnung werden die Quell- und Hemmungsfunktionen für alle KAN'en mittels des in Abschn. III.7.2 angegebenen Algorithmus' bestimmt. Der Verlauf einiger dieser Funktionen ist in Bild III.15a,b dargestellt. Der Verlauf der übrigen Quell- und Hemmungsfunktionen ergibt sich hieraus bzw. aus den vorgegebenen mittleren Anrufraten der Quellen und den Freiwahrscheinlichkeiten der Endabnehmer auf einfache Weise. Sie sind deshalb in Bild III.15a,b nicht angegeben.

Im dritten und letzten Schritt der Rechnung werden die interessierenden Verkehrsgrößen der KAN'en gemäß Abschnitt III.6.2 (unter Verwendung der Formeln (III.6.5) + (III.6.6) für die Zustandswahrscheinlichkeiten) berechnet. Hier wurden z.B. die Belastungen $V^{(m)}(i)$ gemäß Gl.(III.6.11), die Verluste $B_V^{(m)}(i)$ gemäß Gl.(III.6.13) bzw. $B_{ges}^{(m)}(i)$ gemäß

Gl.(III.6.14) und die Angebote $A^{(m)}(i)$ gemäß Gl.
(III.6.15) berechnet. Die Werte sind in Tafel III.16
angegeben.

Die Rechenanlage TR4 (Fa. Telefunken) benötigt zur Be-
rechnung der angegebenen Werte insgesamt ca. 8 Minuten.

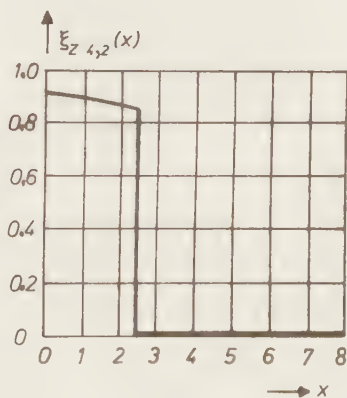
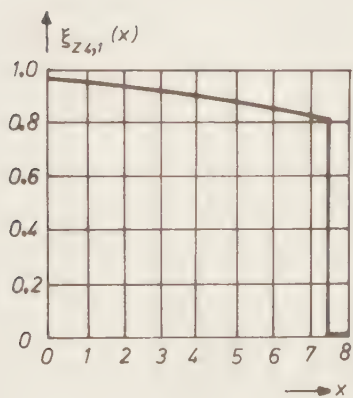
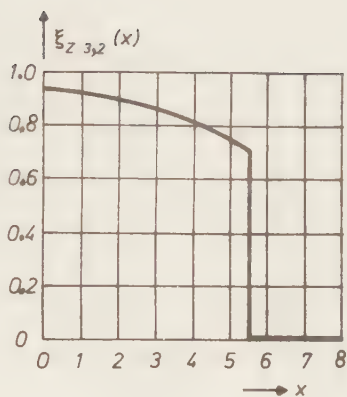
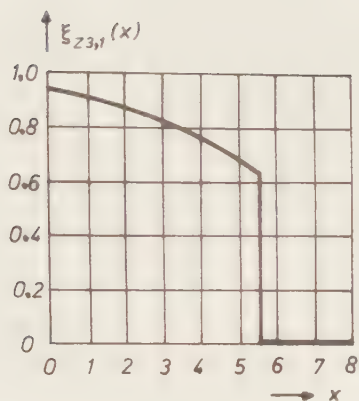


Bild III.15a Die Hemmungsfunktionen für die Zubringerbündel der KAn'en Nr.3 und Nr.4 . Die Funktionen sind der Einfachheit halber durchgezogen, obwohl sie genau genommen nur für ganzzahlige Werte von x definiert sind.

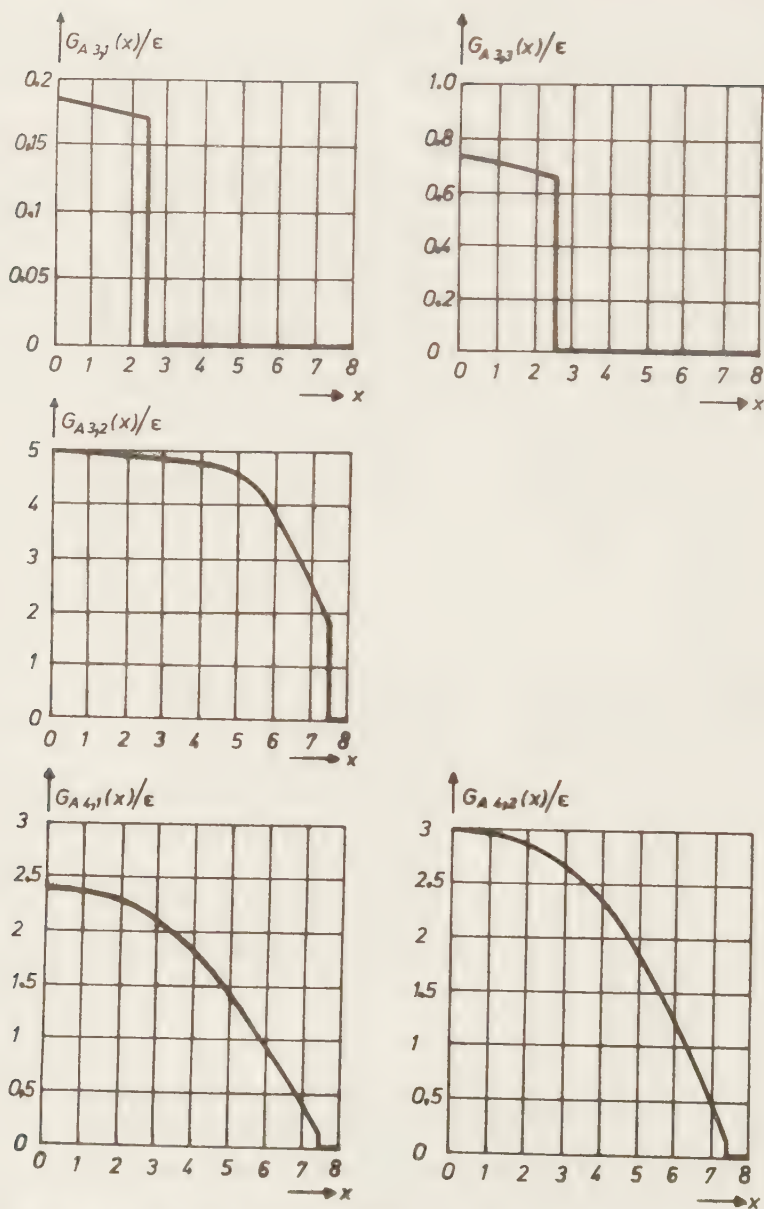


Bild III.15b Die Quellfunktionen für Abnehmerbündel der Kan'en Nr.3 und Nr.4. Die Funktionen sind der Einfachheit halber durchgezogen, obwohl sie genau genommen nur für ganzzahlige Werte von x definiert sind.

m	i	$\frac{A^{(m)}(i)}{Er}$	$\frac{Y^{(m)}(i)}{Er}$	$B_v^{(m)}(i)$	$B_{ges}^{(m)}(i)$
1	1	2.3465	2.0698	$0.8501 \cdot 10^{-2}$	$13.6284 \cdot 10^{-2}$
2	1	3.3042	2.7960	$3.5403 \cdot 10^{-2}$	$15.3800 \cdot 10^{-2}$
3	1	2.3761	2.0698	$4.6026 \cdot 10^{-2}$	$12.8878 \cdot 10^{-2}$
3	2	3.1872	2.7960	$4.1563 \cdot 10^{-2}$	$12.2742 \cdot 10^{-2}$
4	1	4.4394	4.0269	$2.2428 \cdot 10^{-2}$	$9.2915 \cdot 10^{-2}$
4	2	0.5748	0.5175	$2.6790 \cdot 10^{-2}$	$9.9647 \cdot 10^{-2}$
5	1	0.1825	0.1723	—	$5.5862 \cdot 10^{-2}$
6	1	2.1917	2.0650	—	$5.7772 \cdot 10^{-2}$
7	1	2.7075	2.4793	—	$8.4273 \cdot 10^{-2}$

Abgehende Richtung 3 von KAn Nr. 4 (abgehender
Fernverkehr): Abgehendes Angebot: 0.6996 Erl
Bündelbelastung : 0.6667 Erl

Tafel III. 16 Verkehrsgrößen der VSt von Bild III.14

A N H Ä N G E
=====

Zusammenstellung der verwendeten Abkürzungen

Bedeutung

EG	Endabnehmergruppe
I., II., ...GW	I., II., ...Gruppenwahlstufe
LW	Leitungswahlstufe
KAn	Koppelanordnung
QG	Quellengruppe
VSt	Vermittlungsstelle
$W(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A
$W(A/B)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Bedingung B
ZV1	Zufallsverkehr erster Art
ZV2	Zufallsverkehr zweiter Art
$\in$	"aus" oder "ist Element von"
$\notin$	"nicht aus" oder "ist nicht Element von"
$o(x)$	klein Ordo von x
$A \cup B$	Vereinigung der Mengen A und B
$A \cap B$	Durchschnitt der Mengen A und B
$A \subset B$	A ist Untermenge von B
$\{A : B\}$	Menge aller Elemente A, die die Bedingung B erfüllen

Zusammenstellung der im Teil I verwendeten Formelzeichen

	siehe Seite	Bedeutung
B	47	Verlustwahrscheinlichkeit
c_A	47	mittlere Anrufrate
c_V	47	mittlere Verlustrate
$F(\omega)$	46	nicht normierte Lösung der Zustandsgleichungen
$g(\omega)$	48	mittlere Anzahl ankommender Rufe pro Zeiteinheit im Zustand ω
h	40	Zeitintervall
k	28	Erreichbarkeit, Zahl der Ausgänge der Koppelvielfache
$l(\omega)$	48	Zahl belegter Leitungen im Zustand ω
n_A	29	Zahl d. Ausgänge einer KAn
n_{Aj}	22	Leitungszahl d. j-ten Abnehmerbündels
n_E	28	Zahl d. Eingänge eines Koppelvielfaches
n_Z	29	Zahl d. Eingänge einer KAn
n_{Zi}	22	Leitungszahl d. i-ten Zubringerbündels
$P(\omega)$	43	(ergodische) Zustandswahrscheinlichkeit
$P(\omega, t)$	42	absolute Wahrscheinlichkeit für den Zustand ω im Zeitpunkt t
$P(\omega'; \omega'', h)$	40	Übergangswahrscheinlichkeit
$q_\omega, q_{\omega'}, q_{\omega''}$	41	Grenzwerte von Übergangswahrscheinlichkeiten
r	22	Zahl d. Abnehmerbündel (Richtungen)
s	22	Zahl d. Zubringerbündel
t, t', t''	39	Punkte auf der Zeitachse
u	40	Zeitintervall
$v(\omega)$	48	mittlere Zahl abgewiesener Rufe pro Zeiteinheit im Zustand ω
w_w	47	Wartewahrscheinlichkeit
x_i	39	i-te Komponente von X
x_i	45	i-te Komponente von ω
Y	47	Verkehrsbelastung
z_Q	38	Quellenzahl
α	37	mittlere Anrufrate einer Quelle
ε	38	mittlere Enderate
Λ_0	37	mittlere Anrufrate

Formelzeichen im Teil I (Fortsetzung)

	siehe Seite	Bedeutung
$\Lambda(x)$	38	mittlere Anrufrate bei x belegten Quellen
$\phi_i(\omega)$	45	Geburtskoeffizient der i -ten Komponente von $\mathcal{X}$
$\mu_j(x)$	36	Durchlaßwahrscheinlichkeit in Richtung j bei x belegten Leitungen
$\theta_i(\omega)$	45	Sterbekoeffizient der i -ten Komponente von $\mathcal{X}$
$\mathcal{X}(t)$	39	stochastischer Prozeß
ω	39, 45	Punkt von Ω
ω', ω''	39	Punkte im Raum Ω
ω_i^+, ω_i^-	45	zu ω benachbarte Punkte in Ω
Ω	39	Zustandsraum von $\mathcal{X}$

Zusammenstellung der im Teil II verwendeten Formelzeichen

	siehe Seite	Bedeutung
$b_{ij}(\omega)$	68	Hilfsfunktion
$B_V^*(l)$	85	Verlustwahrscheinlichkeit bezüglich des Bündels Nr. l (verlorene Rufe)
$B_V^*(i, j, m)$	82	Verlustwahrscheinlichkeit bezüglich des Verkehrsstroms $Q_i - E_j$
$B_W^*(l)$	85	Verlustwahrscheinlichkeit bezüglich des Bündels Nr. l (weiterverbundene Rufe)
$B_W^*(i, j, m)$	83	Verlustwahrscheinlichkeit bezüglich des Verkehrsstroms $Q_i - E_j$
$c_A^*(l)$	84	mittlere Zahl angebotener Rufe pro Zeiteinheit bezüglich des Bündels Nr. l
$c_A^*(i, j, m)$	80	mittlere Zahl angebotener Rufe pro Zeiteinheit bez. d. Verk.-Str. $Q_i - E_j$
$c_D^*(l)$	84	mittlere Zahl weiterverbundener Rufe pro Zeiteinheit bez. d. Bündels Nr. l
$c_D^*(i, j, m)$	80	mittlere Zahl weiterverb. Rufe pro Zeiteinheit bez. d. Verk.-Str. $Q_i - E_j$
$c_L^*(l)$	84	mittlere Zahl von Gesprächsbeginnen pro Zeiteinheit bez. d. Bündels Nr. l
$c_L^*(i, j)$	77	mittlere Zahl von Gesprächsbeginnen pro Zeiteinheit bez. d. Verk.-Str. $Q_i - E_j$
$c_V^*(l)$	84	mittlere Zahl verlorener Rufe in d. KAN pro Zeiteinheit bez. Bündel Nr. l
$c_V^*(i, j, m)$	80	mittlere Zahl verlorener Rufe in d. KAN pro Zeiteinh. bez. Verk.-Str. $Q_i - E_j$
$c_W^*(l)$	84	mittlere Zahl verlorener Rufe hinter d. KAN pro Zeiteinh. bez. Bündel Nr. l
$c_W^*(i, j, m)$	80	mittlere Zahl verlorener Rufe hinter d. KAN pro Zeiteinh. bez. Verk.-Str. $Q_i - E_j$
$F(\omega)$	73	nicht normierte Lösung der Zustandsgleichungen
$\mathcal{M}$	61	Indexpaarmenge für Verbindungen in d. VSt
$\mathcal{M}_l$	62	Indexpaarmenge für durch das Bündel Nr. l gehende Verbindungen
n	55, 56	Leitungszahl
n_l	61	Leitungszahl des Bündels Nr. l
$\mathcal{N}$	61	Indexmenge: alle Bündelnummern d. VSt
$\mathcal{N}_{ij}$	63	Indexmenge: Bündelnummern d. Weges $Q_i - E_j$

Formelzeichen im Teil II (Fortsetzung)

	siehe Seite	Bedeutung
$\mathcal{N}_{ijk}$	71	Indexmenge: Komplement von $\mathcal{N}_{ij}$ bezügl. $\mathcal{N}$
P_{ij}	56	Aufteilungswahrscheinlichkeit
$P(\omega)$	69	Zustandswahrscheinlichkeit
r	56	Zahl der EG'n der VSt
s	55	Zahl der QG'n der VSt
x_{ij}	62	Komponente von ω
x_{bl}	63	Zahl belegter Leitungen im Bündel Nr. l im Zustand ω
X_{ij}	62	Komponente von $\mathcal{X}$
$Y^*(l)$	84	Verkehrsbelastung des Bündels Nr. l
$Y^*(i, j)$	77	Verkehrsbelastung d. Verk.-Str. $Q_i - E_j$
$\gamma(x)$	56	Freiwahrscheinlichkeit
$\gamma_j(x)$	56	Freiwahrscheinlichkeit d. j -ten EG
ε_{ij}	58	mittlere Enderate der Verbindungen $Q_i - E_j$
$\Lambda(x)$	55	mittlere Anrufrate bei x belegten Quellen
$\Lambda_i(x)$	55	mittlere Anrufrate der QG Q_i bei x belegten Quellen
$\phi_{ij}(\omega)$	68	Geburtskoeffizient d. i, j -ten Komponente von $\mathcal{X}$
$\mu_l(x)$	65, 86	Rechteckfunktion, Durchlaßwahrscheinlichkeit für Bündel Nr. l
$\theta_{ij}(\omega)$	69	Sterbekoeffizient der i, j -ten Komponente von $\mathcal{X}$
$\mathcal{X}(t)$	62, 63	stochastischer Prozeß
$\xi_l(x)$	66	Hilfsfunktion für d. Bündel Nr. l
ω	62	Punkt von Ω
$\omega_{ij}^+, \omega_{ij}^-$	64	zu ω benachbarte Punkte in Ω
Ω	62	Zustandsraum von $\mathcal{X}$
Ω_e	62, 64, 67	Erweiterter Zustandsraum von $\mathcal{X}$
Ω_K	68	Komplement von Ω

Zusammenstellung der im Teil III verwendeten Formelzeichen

	siehe Seite	Bedeutung
$A^{(m)}(i)$	137	Angebot im i-ten Zubringerbündel der KAN Nr. m
$\alpha(\omega_1)$	94	Menge derjenigen ω , die im Teil 1 den Zustand ω_1 nach sich ziehen
$b_{ij}(\omega)$		s. Teil II
$b_{1ij}(\omega_1)$	95	Hilfsfunktion
$b_{1i0}(\omega_1)$	100	Hilfsfunktion
$b_{2ij}(\omega_2)$	102	Hilfsfunktion
$b_{20j}(\omega_2)$	116	Hilfsfunktion
$B_{ges}^{(m)}(i)$	137	Gesamter Verlust des Verkehrs- stromes im i-ten Zubringerbündel der KAN Nr. m
$B_v^{(m)}(i)$	137	Verlust im i-ten Zubringerbündel
$\beta(\omega_2)$	100	Menge derjenigen ω , die im Teil 2 den Zustand ω_2 nach sich ziehen
$c_A^{(m)}(i)$	137	mittlere Zahl angebotener Rufe pro Zeit- einheit im i-ten Zubringerbündel d. KAN Nr. m
$c_L^{(m)}(i,j)$	135	mittlere Zahl von Gesprächsbeginnen pro Zeiteinheit
$c_v^{(m)}(i,j)$	135	mittlere Zahl von Verlustrufen pro Zeiteinheit
$c_w^{(m)}(i,j)$	135	mittlere Zahl von "hinter der KAN" ab- gewiesenen Rufen pro Zeiteinheit
$F^{(m)}(\omega^{(m)})$	134	nicht normierte Lösung der Zustands- gleichungen der KAN Nr. m
$G_0(x)$	116, 119	Quellfunktion
$G_{mi}(x)$	126	Quellfunktion
$G_{Amj}(x)$	141	Quellfunktion
γ_E	92	Indexmenge für EG'n betr. Bündel Nr. L
γ_{El}^*	124	Indexmenge für EG'n betr. Bündel Nr. l
γ_q	92	Indexmenge für QG'n betr. Bündel Nr. L
γ_{ql}^*	124	Indexmenge für QG'n betr. Bündel Nr. l
γ_{Emj}	128	Indexmenge für EG'n
γ_{Em}	128	Indexmenge für EG'n
γ_{qmi}	129	Indexmenge für QG'n
L	90	Nummer des Verbindungsbündels
m		s. Teil II
m'	92	Indexpaarmenge für Wege, die ganz im Teil 1 verlaufen

Formelzeichen im Teil III (Fortsetzung)

	siehe Seite	Bedeutung
$\mathcal{M}''$	92	Indexpaarmenge für Wege, die ganz im Teil 2 verlaufen
$\mathcal{M}_i$		s. Teil II
$\mathcal{M}_{T_1}$	96	Indexpaarmenge für Teil 1
$\mathcal{M}_{T_2}$	103	Indexpaarmenge für Teil 2
n_i		s. Teil II
n_{Amj}	133	Leitungszahl des j-ten Abnehmerbündels
n_{Zmi}	133	Leitungszahl des i-ten Zubringerbündels
$\mathcal{N}$		s. Teil II
$\mathcal{N}_{ij}$		s. Teil II
$\mathcal{N}_{io}$	107	Indexmenge für Bündelnummern im Teil 1
$\mathcal{N}_{oj}$	116	Indexmenge für Bündelnummern im Teil 2
$\overline{\mathcal{N}}_{oj}$	112	Indexmenge für Bündelnummern im Teil 2
$\overline{\mathcal{N}}''$	120	Indexmenge für Bündelnummern im Teil 1
$\overline{\mathcal{N}}''$	113	Indexmenge für Bündelnummern im Teil 2
p_{ij}		s. Teil II
p_{oj}	106	Konstante, als Wahrscheinlichkeit interpretierbar
p_{io}	107	Konstante, als Wahrscheinlichkeit interpretierbar
p_{ioj}	124	Konstante, als Wahrscheinlichkeit interpretierbar
p_{mij}^*	126, 127	Richtungswahrscheinlichkeit
$P(\omega)$		s. Teil II
$P_1(\omega_1)$	94	Zustandswahrscheinlichkeit für Teil 1
$P_2(\omega_2)$	100	Zustandswahrscheinlichkeit für Teil 2
$P^{(m)}(\omega^{(m)})$	134	Zustandswahrscheinlichkeit für KAn Nr. m
r		s. Teil II
r_m	126	Zahl der abgehenden Richtungen der KAn Nr. m
s		s. Teil II
s_m	126	Zahl der Zubringerbündel der KAn Nr. m
u	122	Zahl der KAn'en der VSt
v_{ij}	133	i, j-te Komponente von $\omega^{(m)}$
x_{ij}		s. Teil II

Formelzeichen im Teil III (Fortsetzung)

	siehe Seite	Bedeutung
x_{1ij}	93	i, j-te Komponente von ω_1
x_{2ij}	100	i, j-te Komponente von ω_2
x_{Aj}	133	Zahl belegter Leitungen im j-ten Abnehmerbündel im Zustand $\omega^{(m)}$
$x_{Bl}(\omega)$		s. Teil II
$x_{1Bl}(\omega_1)$	95	Zahl belegter Leitungen im Bündel Nr. l im Zustand ω_1
$x_{2Bl}(\omega_2)$	102	Zahl belegter Leitungen im Bündel Nr. l im Zustand ω_2
x_{zi}	133	Zahl belegter Leitungen im i-ten Zubringerbündel der KAN Nr. m im Zustand $\omega^{(m)}$
X_{ij}		s. Teil II
X_{1ij}	92	i, j-te Komponente von χ_1
X_{2ij}	99	i, j-te Komponente von χ_2
$\gamma^{(m)}(i)$	136	Verkehrsbelastung des i-ten Zubringerbündels der KAN Nr. m
$\gamma^{(m)}(i, j)$	135	Verkehrsbelastung des Verkehrs, der vom i-ten Zubringerbündel zum j-ten Abnehmerbündel der KAN Nr. m geht
z_a		s. Teil I
α		s. Teil I
$\gamma_j(x)$		s. Teil II
ϵ	124	mittlere Enderate
ϵ_{ij}		s. Teil II
ϵ_{i0}	106	Enderate im Teil 1 für Verbindungen in den Teil 2
ϵ_{0j}	115	Enderate im Teil 2 für Verbindungen, die aus Teil 1 kommen
$\Lambda_i(x)$		s. Teil II
$\phi_{ij}(\omega)$		s. Teil II
$\phi_{1ij}(\omega_1)$	95	Geburtskoeffizient der i, j-ten Komponente von χ_1
$\phi_{2ij}(\omega_2)$	102	Geburtskoeffizient der i, j-ten Komponente von χ_2
$\mu_i(x)$		s. Teil II
$\mu_{mj}(x)$	133, 151	Durchlaßwahrscheinlichkeit der Mischung für Richtung j der KAN Nr. m

Formelzeichen im Teil III (Fortsetzung)

	siehe Seite	Bedeutung
$\theta_{ij}(\omega)$		s. Teil II
$\theta_{1ij}(\omega)$	96	Sterbekoeffizient der i, j-ten Komponente von χ_1
$\theta_{2ij}(\omega)$	103	Sterbekoeffizient der i, j-ten Komponente von χ_2
$\chi(t)$		s. Teil II
$\chi_1(t)$	91	stochastischer Prozeß für Teil 1
$\chi_2(t)$	98	stochastischer Prozeß für Teil 2
$\xi_0(x)$	107, 110	Hemmungsfunktion
$\xi_{mj}(x)$	126	Hemmungsfunktion
$\xi_{zmi}(x)$	139	Hemmungsfunktion
$\xi_i(x)$		s. Teil II
$\xi_{1i}(x)$	108	Hilfsfunktion für Teil 1
$\xi_{2i}(x)$	117	Hilfsfunktion für Teil 2
ω		s. Teil II
ω_1	93	Punkt von Ω_1
ω_2	100	Punkt von Ω_2
$\omega^{(m)}$	133	Punkt von Ω_{KANm}
$\omega_{ij}^+, \omega_{ij}^-$		s. Teil II
$\omega_{1ij}^+, \omega_{1ij}^-$	94	zu ω_1 benachbarte Punkte in Ω_1
$\omega_{2ij}^+, \omega_{2ij}^-$	101	zu ω_2 benachbarte Punkte in Ω_2
Ω		s. Teil II
Ω_1	93	Zustandsraum von χ_1
Ω_1^x	120	Menge aller ω_1 , die x Belegungen im Bündel Nr. L nach sich ziehen
Ω_2	100	Zustandsraum von χ_2
Ω_2^x	113	Menge aller ω_2 , die x Belegungen im Bündel Nr. L nach sich ziehen
Ω_{Amj}^x	142	Menge aller $\omega^{(m)}$, die x Belegungen im j-ten Abnehmerbündel nach sich ziehen
Ω_{zmi}^x	140	Menge aller $\omega^{(m)}$, die x Belegungen im i-ten Zubringerbündel nach sich ziehen
Ω_{KANm}	133	Zustandsraum der KAN Nr. m
Ω_{1e}	94	Erweiterter Zustandsraum von χ_1
Ω_{2e}	101	Erweiterter Zustandsraum von χ_2
Ω_{1K}	95	Komplement der Menge Ω_1
Ω_{2K}	102	Komplement der Menge Ω_2

A 1 ANHANG ZU ABSCHNITT III.1.2

Es wird die Umformung von Gl.(III.1.7) zu Gl.(III.1.10) gezeigt. Diese beiden Gleichungen lauten:

$$0 = \sum_{\omega \in \Omega_1} \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} \left[\phi_{ij}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega_{ij}^-) - (\theta_{ij}(\omega) + \phi_{ij}(\omega)) \cdot P(\omega) + \theta_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P(\omega_{ij}^+) \right], \omega_1 \in \Omega_1 \quad (\text{III.1.7})$$

und

$$0 = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} \left[\phi_{ij}(\omega_{ij}^-) \cdot P_1(\omega_{ij}^-) - (\theta_{ij}(\omega_1) + \phi_{ij}(\omega_1)) \cdot P_1(\omega_1) + \theta_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P_1(\omega_{ij}^+) \right] \\ + \sum_{i \in \mathcal{I}_Q} \left[\phi_{i10}(\omega_{i10}^-) \cdot P_1(\omega_{i10}^-) - (\theta_{i10}(\omega_1) + \phi_{i10}(\omega_1)) \cdot P_1(\omega_1) + \theta_{i10}(\omega_{i10}^+) \cdot P_1(\omega_{i10}^+) \right], \omega_1 \in \Omega_1. \quad (\text{III.1.10})$$

Erster Schritt: Betrachtung der Gleichung (III.1.7)

Die Menge $\mathcal{M}$ läßt sich (s. Abschn. III.1.1) wie folgt aufteilen:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \cup \mathcal{M}_L \cup \mathcal{M}'' \quad . \quad (\text{III.1.17})$$

Damit läßt sich die Summe über $(i,j) \in \mathcal{M}$ von Gl.(III.1.7) in drei Teile zerlegen. Es ergibt sich:

$$0 = \left. \begin{aligned} & \sum_{\omega \in \Omega_1} \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}^*} [\dots] \\ & + \sum_{\omega \in \Omega_1} \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}_L} [\dots] \\ & + \sum_{\omega \in \Omega_1} \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}''} [\dots], \omega_1 \in \Omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.1.18a})$$

Dabei bedeutet [...] die eckige Klammer von Gl.(III.1.7). Die Terme der drei Zeilen seien mit $T_1(\omega_1)$, $T_2(\omega_1)$,

$T_3(\omega_1)$ abgekürzt. Damit lautet Gl.(III.1.7):

$$0 = T_1(\omega_1) + T_2(\omega_1) + T_3(\omega_1) . \quad (\text{III.1.18b})$$

Zweiter Schritt: Betrachtung von $T_3(\omega_1)$

Es wird gezeigt, daß $T_3(\omega_1)$ von Gl.(III.1.18a,b) identisch Null ist. Dieser Term lautet, wenn man die Summierung vertauscht:

$$T_3(\omega_1) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}''} \sum_{\omega \in \alpha(\omega_1)} [\dots] , \quad \omega_1 \in \Omega_1 .$$

Die innere Summe sei mit Sum_{ij} bezeichnet. Dann ist:

$$T_3(\omega_1) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}''} \text{Sum}_{ij} , \quad \omega_1 \in \Omega_1 .$$

Sum_{ij} lautet:

$$\text{Sum}_{ij} = \sum_{\omega \in \alpha(\omega_1)} \left[\phi_{ij}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega_{ij}^-) - (\theta_{ij}(\omega) + \phi_{ij}(\omega)) \cdot P(\omega) + \theta_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P(\omega_{ij}^+) \right] ,$$

$(i,j) \in \mathcal{M}'' , \omega_1 \in \Omega_1 .$

Die hier vorkommende Summierung wird in zwei Summierungen aufgeteilt. Dazu wird die Menge $\alpha(\omega_1)$ in Untermengen zerlegt, deren Elemente sich nur jeweils in einer Komponente unterscheiden. Diese eine Komponente sei x_{ij} , $(i,j) \in \mathcal{M}''$. Sei

$$\tilde{\omega}_{ij} = (x_{ef} ; (e,f) \in \mathcal{M} , (e,f) \neq (i,j)) , \quad (i,j) \in \mathcal{M}'' .$$

Dann ist jede der oben genannten Untermengen von $\alpha(\omega_1)$ durch ein Zahlentupel $\tilde{\omega}_{ij}$ gekennzeichnet und sei mit $\tilde{\alpha}(\tilde{\omega}_{ij})$ bezeichnet.

Die Zerlegung von $\alpha(\omega_1)$ in Untermengen $\tilde{\alpha}(\tilde{\omega}_{ij})$ ergibt eine Menge von Zahlentupeln $\tilde{\omega}_{ij}$, die mit $\tilde{\alpha}(\omega_1)$ bezeichnet sei. Dann ist:

$$\bigcup_{\tilde{\omega}_{ij} \in \tilde{\alpha}(\omega_1)} \left[\bigcup_{\omega \in \tilde{\alpha}(\tilde{\omega}_{ij})} \omega \right] = \bigcup_{\omega \in \alpha(\omega_1)} \omega .$$

Damit lautet Sum_{ij} :

$$Sum_{ij} = \sum_{\tilde{\omega}_{ij} \in \tilde{\Omega}(\omega_j)} \sum_{\omega \in \tilde{\Omega}(\tilde{\omega}_{ij})} [\dots] .$$

Die Elemente der Menge $\tilde{\Omega}(\tilde{\omega}_{ij})$ unterscheiden sich nur in der Komponente x_{ij} . Dabei tritt - wie man leicht einsieht - wegen $(i,j) \in \mathcal{M}$ die Besonderheit auf, daß x_{ij} genau alle ganzen Zahlen zwischen 0 und einem maximalen Wert annimmt. Der maximale Wert hängt im allgemeinen von $\tilde{\omega}_{ij}$ ab und sei mit $x_{ij,max}(\tilde{\omega}_{ij})$ bezeichnet.

Also ist:

$$Sum_{ij} = \sum_{\tilde{\omega}_{ij} \in \tilde{\Omega}(\omega_j)} \sum_{x_{ij}=0}^{x_{ij,max}} [\dots] .$$

Hiervon sei wieder die innere Summe betrachtet und mit X_{sumij} bezeichnet:

$$\begin{aligned} X_{sumij} = & \sum_{x_{ij}=0}^{x_{ij,max}} [\phi_{ij}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega_{ij}^-)] - \sum_{x_{ij}=0}^{x_{ij,max}} [\phi_{ij}(\omega) \cdot P(\omega)] \\ & - \sum_{x_{ij}=0}^{x_{ij,max}} [\theta_{ij}(\omega) \cdot P(\omega)] + \sum_{x_{ij}=0}^{x_{ij,max}} [\theta_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P(\omega_{ij}^+)] . \end{aligned}$$

Mit den Gl.'en (II.2.4a) und (II.2.4b) wird hieraus:

$$\begin{aligned} X_{sumij} = & \sum_{x_{ij}=-1}^{x_{ij,max}-1} [\phi_{ij}(\omega) \cdot P(\omega)] - \sum_{x_{ij}=0}^{x_{ij,max}} [\phi_{ij}(\omega) \cdot P(\omega)] \\ & - \sum_{x_{ij}=0}^{x_{ij,max}} [\theta_{ij}(\omega) \cdot P(\omega)] + \sum_{x_{ij}=1}^{x_{ij,max}+1} [\theta_{ij}(\omega) \cdot P(\omega)] . \end{aligned}$$

Von der oberen und unteren Zeile bleiben nur je zwei Terme übrig:

$$X_{sum\ ij} = \sum_{x_{ij} = -1, x_{ijmax}} [\phi_{ij}(\omega) \cdot P(\omega)] - \sum_{x_{ij} = 0, x_{ijmax}+1} [\theta_{ij}(\omega) \cdot P(\omega)] .$$

In der oberen Summe gilt: Für $x_{ij} = -1$ ist $P(\omega)$ gleich Null, weil dann $\omega \in \Omega_K$ ist (vergl. Abschn. II.2.3). Für $x_{ij} = x_{ijmax}$ ist $\phi_{ij}(\omega) = 0$, denn x_{ijmax} ist ja gerade der höchste Wert, den x_{ij} annehmen kann und für diesen Wert ist der Geburtskoeffizient Null (vergl. die Gl.'en (II.2.11a,b) und (II.2.12)). In der unteren Summe gilt: Für $x_{ij} = 0$ ist $\theta_{ij}(\omega)$ gleich Null (siehe Gl.(II.2.13)). Für $x_{ij} = x_{ijmax} + 1$ ist $P(\omega)$ gleich Null, weil dann $\omega \in \Omega_K$ ist. Damit ist $X_{sum\ ij}$ identisch gleich Null. Wegen

$$Sum_{ij} = \sum_{\tilde{\omega}_{ij} \in \tilde{\Omega}(\omega_1)} X_{sum\ ij}$$

ist also Sum_{ij} identisch Null. Damit ist der Term $T_3(\omega_1)$ von Gl.(III.18a,b) identisch Null:

$$T_3(\omega_1) \equiv 0, \quad \omega_1 \in \Omega_1 .$$

Dritter Schritt: Umformung von $T_1(\omega_1)$

Es wird der Term $T_1(\omega_1)$ von Gl.(III.1.18b) umgeformt. Er lautet:

$$T_1(\omega_1) = \sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} [\phi_{ij}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega_{ij}^-) - (\theta_{ij}(\omega) + \phi_{ij}(\omega)) \cdot P(\omega) + \theta_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P(\omega_{ij}^+)] .$$

Summierung umgestellt:

$$T_1(\omega_1) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}^1} \left[\sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)} \phi_{ij}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega_{ij}^-) \right. \\ \left. - \sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)} (\theta_{ij}(\omega) + \phi_{ij}(\omega)) \cdot P(\omega) \right. \\ \left. + \sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)} \theta_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P(\omega_{ij}^+) \right] \quad (III.1.19)$$

Mit Gl.(III.1.8) und Gl.(III.1.9) wird hieraus:

$$T_1(\omega_1) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}^1} \left[\sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_{1ij})} \phi_{ij}(\omega) \cdot P(\omega) \right. \\ \left. - \sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)} (\theta_{ij}(\omega) + \phi_{ij}(\omega)) \cdot P(\omega) \right. \\ \left. + \sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_{1ij}^+)} \theta_{ij}(\omega) \cdot P(\omega) \right] \quad (III.1.20)$$

Die ausführliche Form der hierin enthaltenen $\phi_{ij}(\omega)$ ist in Gl.(II.2.12) angegeben und die der $\theta_{ij}(\omega)$ in Gl.(II.2.13).

Beide Größen enthalten die in Gl.(II.2.11a bzw. b) definierte Funktion $b_{ij}(\omega)$. Es sei mit $\tilde{p}_{ij}$ eine Funktion bezeichnet, die folgende Eigenschaft hat:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p}_{ij} &= 1 \quad \text{für } p_{ij} \neq 0, \\ &= 0 \quad \text{für } p_{ij} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (III.1.21a)$$

Weiter sei $\tilde{\zeta}_l(x)$ folgende Funktion:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\zeta}_l(x) &= 1 && \text{für } \zeta_l(x) \neq 0, \\ &= 0 && \text{für } \zeta_l(x) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.1.21b})$$

und $\tilde{b}(\omega)$ sei folgende Funktion:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{b}(\omega) &= 1 && \text{falls alle Komponenten} \\ &&& \text{von } \omega \text{ nicht negativ,} \\ &= 0 && \text{sonst.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.1.21c})$$

Damit kann man $b_{ij}(\omega)$ so ausdrücken:

$$b_{ij}(\omega) = \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{N}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{Bl}) \right] \cdot \tilde{b}(\omega) \quad . \quad (\text{III.1.22})$$

Mit Gl.(III.1.22) wird aus Gl.(II.2.12):

$$\phi_{ij}(\omega) = p_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{N}_{ij}}{\prod} \zeta_l(x_{Bl}) \right] \cdot \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{N}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{Bl}) \right] \cdot \tilde{b}(\omega), \quad (i,j) \in \mathcal{M}, \omega \in \Omega_e. \quad (\text{III.1.23})$$

x_{Bl} ist hierin die Zahl belegter Leitungen im Bündel Nr. l , die man (vergl. Gl.(II.2.3)) durch Komponenten von ω ausdrücken kann. Die in Gl.(III.1.19) in $\phi_{ij}(\omega)$ vorkommenden x_{Bl} kann man aber auch durch Summen von Komponenten von ω_i ausdrücken. Der Grund ist, daß hier l immer die Nummer eines im Teil 1 befindlichen Bündels ist. Diese Rechnung sei hier nicht durchgeführt; vielmehr merken wir uns nur, daß man für $(i,j) \in \mathcal{M}$ die x_{Bl} in $\phi_{ij}(\omega)$ als Funktion von ω_i auffassen darf. Also darf man dort $x_{1Bl}(\omega_i)$ statt $x_{Bl}(\omega)$ schreiben. Damit wird aus Gl.(III.1.23) im Fall $(i,j) \in \mathcal{M}$:

$$\phi_{ij}(\omega) = p_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \zeta_l(x_{1Bl}(\omega_1)) \right] \cdot \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1Bl}(\omega_1)) \right] \cdot \tilde{b}(\omega), \quad (i,j) \in \mathcal{M}', \omega \in \Omega_e.$$

(III.1.24)

Nun seien die Sterbekoeffizienten betrachtet. Mit Gl.(III.1.22) wird aus Gl.(II.2.13):

$$\Theta_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ij} \cdot x_{ij} \cdot \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{Bl}(\omega_{ij}^-)) \right] \cdot \tilde{b}(\omega_{ij}^-), \quad (i,j) \in \mathcal{M}, \omega \in \Omega_e.$$

(III.1.25)

Gemäß Gl.(II.3.5) ist:

$$x_{Bl}(\omega_{ij}^-) = x_{Bl}(\omega) - 1 \quad \text{für } l \in \mathcal{M}_{ij}.$$

Damit ist:

$$\Theta_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ij} \cdot x_{ij} \cdot \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{Bl}(\omega) - 1) \right] \cdot \tilde{b}(\omega_{ij}^-), \quad (i,j) \in \mathcal{M}, \omega \in \Omega_e.$$

(III.1.26)

Mit derselben Argumentation, die zu Gl.(III.1.24) führte, kann man in Gl.(III.1.26) $x_{1Bl}(\omega_1)$ statt $x_{Bl}(\omega)$ schreiben, weil $(i,j) \in \mathcal{M}'$ ist. Weiter kann man gemäß Gl.(III.1.4a)

x_{1ij} statt x_{ij} schreiben. Also wird:

$$\Theta_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ij} \cdot x_{1ij} \cdot \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1Bl}(\omega_1) - 1) \right] \cdot \tilde{b}(\omega_{ij}), \quad (i,j) \in \mathcal{M}', \omega \in \Omega_e. \quad (\text{III.1.27})$$

Mit den Gl.'en (III.1.24) und (III.1.27) wird aus Gl. (III.1.20):

$$\begin{aligned} T_1(\omega_1) = & \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}'} \left\{ \right. \\ & p_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1Bl}(\omega_{ij}^-)) \right] \cdot \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1Bl}(\omega_{ij}^-)) \right] \cdot \sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_{ij}^-)} \tilde{b}(\omega) \cdot P(\omega) \\ & - \varepsilon_{ij} \cdot x_{1ij} \cdot \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1Bl}(\omega_1) - 1) \right] \cdot \sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)} \tilde{b}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega) \\ & - p_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1Bl}(\omega_1)) \right] \cdot \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1Bl}(\omega_1)) \right] \cdot \sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)} \tilde{b}(\omega) \cdot P(\omega) \\ & \left. + \varepsilon_{ij} \cdot (x_{1ij} + 1) \cdot \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1Bl}(\omega_{ij}^+) - 1) \right] \cdot \sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_{ij}^+)} \tilde{b}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega) \right\}, \\ & \omega_1 \in \Omega_1. \end{aligned}$$

In der ersten und dritten Zeile kann man $\tilde{b}(\omega)$ weglassen, da $P(\omega)$ gemäß Abschn. II.2.3 Null ist, falls $\omega \in \Omega_K$.

In der zweiten Zeile bewirkt $\tilde{b}(\omega_{ij}^-)$, daß $\sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_1)} \tilde{b}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega)$ zu Null wird, falls $x_{1ij} = 0$. Da aber in dieser Zeile x_{1ij} als Faktor auftritt, entsteht kein Fehler, wenn man $\tilde{b}(\omega_{ij}^-)$ wegläßt. In der vierten Zeile bewirkt $\tilde{b}(\omega_{ij}^-)$, daß die

Summe

$$\sum_{\omega \in \mathcal{A}(\omega_{ij}^+)} \tilde{b}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega)$$

zu Null wird für $x_{ij} + 1 = 0$. Da in dieser Zeile aber $(x_{ij} + 1)$ als Faktor steht, entsteht kein Fehler, wenn man $\tilde{b}(\omega_{ij}^-)$ wegläßt. Damit kann man $\tilde{b}(\dots)$ in allen vier Zeilen weglassen. Nun wendet man Gl.(III.1.6) an. Weiter kann man gemäß den Gl.'en (II.3.5) + (III.1.4a)

$$x_{1Bl}(\omega_1) - 1 = x_{1Bl}(\omega_{ij}^-), \quad l \in \mathcal{M}_{ij}, (i,j) \in \mathcal{M}^1$$

setzen und erhält:

$$\begin{aligned} T_1(\omega_1) = & \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}^1} \left\{ p_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \zeta_l(x_{1Bl}(\omega_{ij}^-)) \right] \cdot \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1Bl}(\omega_{ij}^-)) \right] \cdot P_1(\omega_{ij}^-) \right. \\ & - \varepsilon_{ij} \cdot x_{ij} \cdot \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1Bl}(\omega_{ij}^-)) \right] \cdot P_1(\omega_1) \\ & - p_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \zeta_l(x_{1Bl}(\omega_1)) \right] \cdot \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1Bl}(\omega_1)) \right] \cdot P_1(\omega_1) \\ & \left. + \varepsilon_{ij} \cdot (x_{ij} + 1) \cdot \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(\omega_1) \right] \cdot P_1(\omega_{ij}^+) \right\}, \quad \omega_1 \in \Omega_1. \end{aligned}$$

Nun wird folgende Funktion definiert:

$$\tilde{b}_1(\omega_1) = \begin{cases} 1 & \text{falls alle Komponenten von} \\ & \omega_1 \text{ nicht negativ,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{III.1.28})$$

Dann darf man in der obigen Form von $T_1(\omega_1)$ die erste und zweite Zeile mit $\tilde{b}_1(\omega_{ij}^-)$ und die dritte und vierte Zeile mit $\tilde{b}_1(\omega_1)$ multiplizieren, ohne daß ein Fehler

entsteht. Wir kürzen ab:

$$b_{1ij}(\omega_1) = \tilde{p}_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1B_l}(\omega_1)) \right] \cdot \tilde{b}_{ij}(\omega_1), \quad (i,j) \in \mathcal{M}' \quad (\text{III.1.29})$$

$b_{1ij}(\omega_1)$ ist also eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$\left. \begin{aligned} b_{1ij}(\omega_1) &= 0 \text{ für solche Zählentupel } \omega_1, \text{ bei denen} \\ &\quad \text{entweder} \\ &\quad \text{der Ausdruck } p_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1B_l}(\omega_1)) \right] \\ &\quad \text{gleich Null ist} \\ &\quad \text{oder wenigstens eine Komponente} \\ &\quad \text{von } \omega_1 \text{ negativen Wert hat,} \\ &= 1 \text{ sonst,} \end{aligned} \right\} (i,j) \in \mathcal{M}' \quad (\text{III.1.30})$$

Es seien weiter folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\phi_{1ij}(\omega_1) = p_{ij} \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}_{ij}}{\prod} \tilde{\zeta}_l(x_{1B_l}(\omega_1)) \right] \cdot b_{1ij}(\omega_1), \quad (i,j) \in \mathcal{M}', \omega_1 \in \Omega_{1e} \quad (\text{III.1.31})$$

und

$$\Theta_{1ij}(\omega_1) = \varepsilon_{ij} \cdot x_{1ij} \cdot b_{1ij}(\omega_{1ij}), \quad (i,j) \in \mathcal{M}', \omega_1 \in \Omega_{1e} \quad (\text{III.1.32})$$

Damit lautet $T_i(\omega_1)$:

$$T_1(\omega_1) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} \left[\phi_{ij}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega_{ij}^-) - (\phi_{ij}(\omega_1) + \phi_{ij}(\omega_1)) \cdot P(\omega_1) + \phi_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P(\omega_{ij}^+) \right],$$

$$\omega_1 \in \Omega_1.$$

(III.1.33)

Vierter Schritt: Umformung von $T_2(\omega_1)$

Es wird der Term $T_2(\omega_1)$ von Gl. (III.1.18b) umgeformt.
 $T_2(\omega_1)$ lautet:

$$T_2(\omega_1) = \sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}_L} \left[\phi_{ij}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega_{ij}^-) - (\phi_{ij}(\omega) + \phi_{ij}(\omega)) \cdot P(\omega) + \phi_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P(\omega_{ij}^+) \right], \quad \omega_1 \in \Omega_1.$$

Es war (vergl. Abschn. III.1.1) $\mathcal{I}_Q$ die Menge der Nummern aller QG'n, die Teil 2 erreichen können und $\mathcal{I}_E$ die Menge der Nummern aller EG'n, die von Teil 1 erreicht werden können. Man erhält also die Indexpaarmenge $\mathcal{M}_L$, indem man alle Paare (i,j) mit $i \in \mathcal{I}_Q$ und $j \in \mathcal{I}_E$ bildet. Das bedeutet, daß man

$$\text{statt } \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}_L} \quad \text{auch } \sum_{i \in \mathcal{I}_Q} \sum_{j \in \mathcal{I}_E}$$

schreiben kann. Damit erhält man nach Vertauschung von Summierungen:

$$T_2(\omega_1) = \sum_{i \in \mathcal{I}_Q} \left\{ \sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \phi_{ij}(\omega_{ij}^-) \cdot P(\omega_{ij}^-) \right] \right.$$

$$- \sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} (\phi_{ij}(\omega) + \phi_{ij}(\omega)) \cdot P(\omega) \right]$$

$$\left. + \sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \phi_{ij}(\omega_{ij}^+) \cdot P(\omega_{ij}^+) \right] \right\}, \quad \omega_1 \in \Omega_1.$$

Hieraus wird mit Gl.(III.1.8) und Gl.(III.1.9):

$$I_2(\omega_1) = \sum_{i \in \mathcal{I}_Q} \left\{ \sum_{\omega \in \mathcal{O}(\omega_{1ij}^-)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \phi_{ij}(\omega) \cdot P(\omega) \right] \right. \\ \left. - \sum_{\omega \in \mathcal{O}(\omega_1)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} (\theta_{ij}(\omega) + \phi_{ij}(\omega)) \cdot P(\omega) \right] \right. \\ \left. + \sum_{\omega \in \mathcal{O}(\omega_{1ij}^+)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \theta_{ij}(\omega) \cdot P(\omega) \right] \right\}, \quad \omega_1 \in \Omega_1.$$

Nun sei im ersten und vierten Term j (willkürlich) gleich Null gesetzt. Mit Gl.(III.1.6) erhält man denn:

$$I_2(\omega_1) = \sum_{i \in \mathcal{I}_Q} \left\{ \frac{\sum_{\omega \in \mathcal{O}(\omega_{1ij}^-)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \phi_{ij}(\omega) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \mathcal{O}(\omega_{1ij}^-)} P(\omega)} \cdot P_1(\omega_{1ij}^-) \right. \\ \left. - \left(\frac{\sum_{\omega \in \mathcal{O}(\omega_1)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \theta_{ij}(\omega) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \mathcal{O}(\omega_1)} P(\omega)} + \frac{\sum_{\omega \in \mathcal{O}(\omega_1)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \phi_{ij}(\omega) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \mathcal{O}(\omega_1)} P(\omega)} \right) \cdot P_1(\omega_1) \right. \\ \left. + \frac{\sum_{\omega \in \mathcal{O}(\omega_{1ij}^+)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \theta_{ij}(\omega) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \mathcal{O}(\omega_{1ij}^+)} P(\omega)} \cdot P_1(\omega_{1ij}^+) \right\}, \quad \omega_1 \in \Omega_1, (j=0).$$

Es seien folgende Abkürzungen gewählt:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{110}(\omega_1) &= \frac{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \phi_{ij}(\omega) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} P(\omega)} & \text{für } \omega_1 \in \Omega_1, \\ &= 0 & \text{für } \omega_1 \notin \Omega_1, \end{aligned} \right\} i \in \mathcal{I}_Q, \quad (\text{III.1.34})$$

und

$$\left. \begin{aligned} \theta_{110}(\omega_1) &= \frac{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \theta_{ij}(\omega) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} P(\omega)} & \text{für } \omega_1 \in \Omega_1, \\ &= 0 & \text{für } \omega_1 \notin \Omega_1, \end{aligned} \right\} i \in \mathcal{I}_Q. \quad (\text{III.1.35})$$

Also wird:

$$I_2(\omega_1) = \sum_{i \in \mathcal{I}_Q} \left[\phi_{110}(\omega_{110}^-) \cdot P_1(\omega_{110}^-) - (\theta_{110}(\omega_1) + \phi_{110}(\omega_1)) \cdot P_1(\omega_1) + \theta_{110}(\omega_{110}^+) \cdot P_1(\omega_{110}^+) \right], \quad \omega_1 \in \Omega_1. \quad (\text{III.1.36})$$

Fünfter Schritt: Ergebnis

Aus Gl.(III.1.7) wird damit

$$0 = I_1(\omega_1) + I_2(\omega_1), \quad \omega_1 \in \Omega_1, \quad (\text{III.1.37})$$

wobei für $I_1(\omega_1)$ Gl.(III.1.33) gilt und für $I_2(\omega_1)$ Gl.(III.1.36).

A 2 ANHANG ZU ABSCHNITT III.3.2

Es wird die Umformung von Gl.(III.1.11b) zu Gl.(III.3.3) gezeigt (Abschnitte A 2.1 bis A 2.4). Weiter wird die Umformung von Gl.(III.1.12b) zu Gl.(III.3.4) gezeigt (Abschnitt A 2.5).

A 2. 1 Eine erste Umformung von Gl.(III.1.11b)

In diesem Abschnitt wird eine erste Umformung von Gl. (III.1.11b) mit Hilfe der Voraussetzungen (III.3.1) und (III.3.2) vorgenommen.

Dazu wird zunächst der in Gl.(III.1.11b) vorkommende Ausdruck für $\phi_{ij}(\omega)$ betrachtet. Er lautet gemäß Gl. (II.2.12):

$$\phi_{ij}(\omega) = p_{ij} \cdot \left[\prod_{l \in \pi_{ij}} \zeta_l(x_{B_l}(\omega)) \right] \cdot b_{ij}(\omega), \quad \omega \in \Omega_e. \quad (\text{III.3.20})$$

Hierin ist π_{ij} die Menge der Nummern derjenigen Bündel, durch die der Weg $Q_i - E_j$ verläuft. Für $(i,j) \in \mathcal{M}_L$ verläuft dieser Weg durch das Bündel Nr. L , das das Verbindungsbündel von Teil 1 nach Teil 2 ist. In Gl.(III.1.11b) ist $(i,j) \in \mathcal{M}_L$. Wie man (z.B. anhand von Bild III.1) leicht einsieht, kann man die Menge π_{ij} in zwei fremde Mengen π_{i0} und $\bar{\pi}_{0j}$ zerlegen:

$$\pi_{ij} = \pi_{i0} \cup \bar{\pi}_{0j}. \quad (\text{III.3.21})$$

π_{i0} ist die Menge der Bündelnummern, durch die der Weg $Q_i - E_j$ im Teil 1 verläuft, einschließlich des Verbindungsbündels Nr. L . $\bar{\pi}_{0j}$ ist die Menge der Bündelnummern, durch die der Weg $Q_i - E_j$ im Teil 2 verläuft, ausschließlich des Verbindungsbündels Nr. L . Im Beispiel von Bild III.1 ist:

$$L = 9; \quad \pi_L = \pi_9 = \{ (2,2), (2,3), (3,2), (3,3) \},$$

$$\pi_{20} = \{ 4, 5, 9 \} \quad , \quad \overline{\pi}_{02} = \{ 12, 13 \} ,$$

$$\pi_{30} = \{ 6, 7, 9 \} \quad , \quad \overline{\pi}_{03} = \{ 14, 15 \} .$$

Mit Gl.(III.3.21) wird aus Gl.(III.3.20):

$$\phi_{ij}(\omega) = \left[\prod_{l \in \pi_{i0}} \zeta_l(x_{B_l}(\omega)) \right] \cdot p_{ij} \cdot \left[\prod_{l \in \pi_{0j}} \zeta_l(x_{B_l}(\omega)) \right] \cdot b_{ij}(\omega), \quad i \in \mathcal{Z}_Q, j \in \mathcal{Z}_E, \omega \in \Omega_e. \quad (\text{III.3.22})$$

Es sei folgende Abkürzung eingeführt:

$$p_{i0} = \sum_{j \in \mathcal{Z}_E} p_{ij} \quad , \quad i \in \mathcal{Z}_Q . \quad (\text{III.3.23})$$

Damit gilt mit Gl.(III.3.1):

$$p_{ij} = p_{i0} \cdot p_{0j} \quad , \quad (i, j) \in \pi_L . \quad (\text{III.3.23a})$$

p_{i0} kann man als Wahrscheinlichkeit dafür deuten, daß ein von der QG Q_i ausgesendeter Ruf zum Teil 2 zielt, also zur EG E_0 , die den Teil 2 repräsentiert. Mit Gl.(III.3.23) und (III.3.23a) wird aus Gl.(III.3.22):

$$\phi_{ij}(\omega) = p_{i0} \cdot \left[\prod_{l \in \pi_{i0}} \zeta_l(x_{B_l}(\omega)) \right] \cdot p_{0j} \cdot \left[\prod_{l \in \pi_{0j}} \zeta_l(x_{B_l}(\omega)) \right] \cdot b_{ij}(\omega) .$$

In der linken eckigen Klammer darf man (vergl. den Passus zwischen Gl.(III.1.23) und (III.1.24) im Anhang A 1) statt

$x_{Bl}(\omega)$ auch $x_{1Bl}(\omega_1)$ schreiben. Dies geschehe. Dann werde $\phi_{ij}(\omega)$ in die Gl.(III.1.11b) eingesetzt. Es ergibt sich:

$$\phi_{iio}(\omega_1) = \frac{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} \left[\sum_{j \in \mathcal{J}_E} p_{io} \cdot \left[\prod_{l \in \mathcal{N}_{io}} \zeta_l(x_{1Bl}(\omega_1)) \right] \cdot p_{oj} \cdot \left[\prod_{l \in \mathcal{N}_{oj}} \zeta_l(x_{Bl}(\omega)) \right] \cdot b_{ij}(\omega) \cdot P(\omega) \right]}{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} P(\omega)},$$

$i \in \mathcal{J}_Q, \omega_1 \in \Omega_1.$

(III.3.24)

Hierin darf man wegen Gl.(II.3.9) $F(\omega)$ statt $P(\omega)$ schreiben. $F(\omega)$ ist die nicht normierte Lösung der Zustandsgleichungen von $\mathcal{X}$. Betrachtet man nur Zählentupel $\omega_1 \in \Omega_1$, dann sind alle $\omega \in \Omega(\omega_1)$ selbstverständlich Elemente von Ω . Damit kann man $b_{ij}(\omega)$ im Zähler weglassen, und es wird

$$\phi_{iio}(\omega_1) = p_{io} \cdot \left[\prod_{l \in \mathcal{N}_{io}} \zeta_l(x_{1Bl}(\omega_1)) \right] \cdot T(\omega_1), \quad i \in \mathcal{J}_Q, \omega_1 \in \Omega_1. \quad (\text{III.3.25})$$

Hierin ist $T(\omega_1)$ folgende Abkürzung:

$$T(\omega_1) = \frac{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} \left\{ \left[\sum_{j \in \mathcal{J}_E} \left[p_{oj} \cdot \prod_{l \in \mathcal{N}_{oj}} \zeta_l(x_{Bl}(\omega)) \right] \right] \cdot F(\omega) \right\}}{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} F(\omega)}, \quad \omega_1 \in \Omega_1. \quad (\text{III.3.26})$$

Die Gl.'en (III.3.25,26) stellen eine neue Form von $\phi_{iio}(\omega_1)$ dar.

A 2. 2 Umformung des Ausdrucks $T(\omega_1)$

Es wird in sechs Schritten gezeigt, daß der Ausdruck $T(\omega_1)$ (siehe Gl.(I.3.26)) in besonders einfacher Weise von ω_1 abhängt: Er ist nur eine Funktion von x_{1BL} , der Zahl belegter Leitungen im Verbindungsbündel Nr. L ; siehe Gl.(III.3.64).

Schritt 1: Ausklammern gewisser Faktoren in Zähler und Nenner und Kürzen derselben

Der zu untersuchende Ausdruck lautet gemäß Gl.(III.3.26):

$$T(\omega_1) = \frac{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} [K_2(\omega) \cdot F(\omega)]}{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} F(\omega)} \quad (III.3.27)$$

Hierin ist $K_2(\omega)$ folgende Abkürzung:

$$K_2(\omega) = \sum_{j \in \mathcal{J}_E} [p_{0j} \cdot \frac{l \in \overline{\mathcal{M}}_{0j}}{\prod \zeta_l(x_{Bl}(\omega))}] \quad (III.3.28)$$

Als erstes sei $F(\omega)$ betrachtet. Es ist gemäß Gl.(II.3.10):

$$F(\omega) = \left[\frac{(i_{ij}) \in \mathcal{M}}{\prod \frac{p_{ij}}{e_{ij}}} \frac{x_{ij}^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \right] \cdot \left[\frac{l \in \mathcal{M}}{\prod \left[\frac{x_{Bl}(\omega) - 1}{\prod_{\nu=0} \zeta_l(\nu)} \right]} \right] \quad (III.3.29)$$

Die hierin vorkommende Menge $\mathcal{M}$ kann man gemäß Gl.(III.1.17) (diese Gleichung befindet sich im Anhang A 1) wie folgt zerlegen:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}_L \cup \mathcal{M}'' . \quad (\text{III.3.30a})$$

Die Menge $\mathcal{M}$ die - vergl. Abschn. II.2.1 - die Menge der Nummern aller Leitungsbündel der VSt ist, kann man analog dazu wie folgt zerlegen:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}' \cup \overline{\mathcal{M}}'' . \quad (\text{III.3.30b})$$

Dabei sei $\mathcal{M}'$ die Menge der Nummern aller im Teil 1 befindlichen Bündel, einschließlich des Verbindungsbündels Nr. 4 . Im Beispiel von Bild III.1 ist:

$$\mathcal{M}' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} .$$

$\overline{\mathcal{M}}''$ sei die Menge aller im Teil 2 befindlichen Bündel, jedoch ohne das Verbindungsbündel Nr. 4 . Im Beispiel von Bild III.1 ist:

$$\overline{\mathcal{M}}'' = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\} .$$

Wegen Gl.(III.3.30a) und Gl.(III.3.30b) kann man $F(\omega)$ wie folgt darstellen:

$$F(\omega) = F_{11}(\omega) \cdot F_{00}(\omega) \cdot F_{22}(\omega) . \quad (\text{III.3.31})$$

Für die hierin verwendeten Abkürzungen gilt:

$$F_{11}(\omega) = \left[\prod_{(i,j) \in \mathcal{M}'} \frac{\left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \right)^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \right] \cdot \left[\prod_{\substack{l \in \mathcal{M}' \\ \nu=0}} \frac{x_{0l}(\omega)-1}{\zeta_l(\nu)} \right] , \quad (\text{III.3.32a})$$

$$F_{00}(\omega) = \prod_{(i,j) \in \mathcal{M}_L} \left[\frac{\left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \right)^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \right] , \quad (\text{III.3.32b})$$

$$F_{22}(\omega) = \left[\prod_{(i,j) \in \overline{M}''} \left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon_{ij}''} \right)^{x_{ij}''} \right] \cdot \left[\prod_{l \in \overline{M}''} \frac{x_{Bl}(\omega) - 1}{\sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_l(\nu)} \right] . \quad (\text{III.3.32c})$$

Mit einer Argumentation analog zu derjenigen, die im Anhang A 1 von Gl.(III.1.23) zu Gl.(III.1.24) führte, kann man hier in Gl.(III.3.32a) $x_{Bl}(\omega_1)$ statt $x_{Bl}(\omega)$ und x_{1ij} statt x_{ij} schreiben. Damit ist F_{11} eine Funktion von ω_1 , und man kann schreiben

$$F_{11}(\omega_1) \text{ statt } F_{11}(\omega) . \quad (\text{III.3.33})$$

Analog dazu kann man in Gl.(III.3.32c) $x_{2Bl}(\omega_2)$ statt $x_{Bl}(\omega)$ und x_{2ij} statt x_{ij} schreiben. Damit ist F_{22} eine Funktion von ω_2 . Also schreibt man ab jetzt

$$F_{22}(\omega_2) \text{ statt } F_{22}(\omega) . \quad (\text{III.3.34})$$

Mit einer analogen Argumentation kann man schließlich in Gl.(III.3.28) $x_{2Bl}(\omega_2)$ statt $x_{Bl}(\omega)$ schreiben. Damit kann man $K_2(\omega_2)$ statt $K_2(\omega)$ schreiben:

$$K_2(\omega_2) = \sum_{j \in \overline{S}_B} \left[P_{0j} \cdot \prod_{l \in \overline{M}_{0j}} \zeta_l(x_{2Bl}(\omega_2)) \right] . \quad (\text{III.3.35})$$

In F_{00} (siehe Gl.(III.3.32b)) kann man wegen der Voraussetzung (III.3.2) ε_{i_0} statt ε_{ij} schreiben. Damit ist

$$F_{00}(\omega) = \prod_{(i,j) \in \overline{M}_L} \left[\frac{\left(\frac{P_{ij}''}{\varepsilon_{i_0}} \right)^{x_{ij}''}}{x_{ij}''!} \right] .$$

Mit der Voraussetzung (III.3.1) und Gl.(III.3.23a) erhält man:

$$F_{00}(\omega) = \frac{(i,j) \in \mathcal{M}_L}{\prod} \left[\frac{1}{x_{ij}!} \left(\frac{p_{i0}}{\varepsilon_{i0}} \cdot p_{0j} \right)^{x_{ij}} \right] = \left[\frac{(i,j) \in \mathcal{M}_L}{\prod} \frac{1}{x_{ij}!} \right] \cdot \left[\frac{(i,j) \in \mathcal{M}_L}{\prod} \left(\frac{p_{i0}}{\varepsilon_{i0}} \cdot p_{0j} \right)^{x_{ij}} \right].$$

Da die Menge $\mathcal{M}_L$ der Indexpaare (i,j) gerade so entsteht, daß man alle $i \in \mathcal{I}_Q$ mit allen $j \in \mathcal{I}_E$ paart, gilt:

$$\begin{aligned} F_{00}(\omega) &= \left[\frac{(i,j) \in \mathcal{M}_L}{\prod} \frac{1}{x_{ij}!} \right] \left[\frac{i \in \mathcal{I}_Q}{\prod} \frac{j \in \mathcal{I}_E}{\prod} \left(\frac{p_{i0}}{\varepsilon_{i0}} \cdot p_{0j} \right)^{x_{ij}} \right] \\ &= \left[\frac{i \in \mathcal{I}_Q}{\prod} \frac{j \in \mathcal{I}_E}{\prod} \left(\frac{p_{i0}}{\varepsilon_{i0}} \right)^{x_{ij}} \right] \cdot \left[\frac{(i,j) \in \mathcal{M}_L}{\prod} \frac{1}{x_{ij}!} \right] \cdot \left[\frac{j \in \mathcal{I}_E}{\prod} \frac{i \in \mathcal{I}_Q}{\prod} (p_{0j})^{x_{ij}} \right]. \end{aligned}$$

Mit den Gl.'en (III.1.4b) und (III.2.4b) wird hieraus:

$$F_{00}(\omega) = F_{01}(\omega) \cdot \left(\frac{(i,j) \in \mathcal{M}_L}{\prod} \frac{1}{x_{ij}!} \right) \cdot F_{02}(\omega) \quad , \quad (\text{III.3.36})$$

wobei folgende Abkürzungen gewählt wurden:

$$F_{01}(\omega) = \frac{i \in \mathcal{I}_Q}{\prod} \left(\frac{p_{i0}}{\varepsilon_{i0}} \right)^{x_{i0}} \quad (\text{III.3.37})$$

und

$$F_{02}(\omega) = \frac{j \in \mathcal{I}_E}{\prod} (p_{0j})^{x_{0j}} \quad . \quad (\text{III.3.38})$$

F_{01} ist eine Funktion von ω_1 , also kann man schreiben

$$F_{01}(\omega_1) \text{ statt } F_{01}(\omega) \quad . \quad (\text{III.3.39})$$

F_{02} ist eine Funktion von ω_2 , also kann man schreiben

$$F_{02}(\omega_2) \text{ statt } F_{02}(\omega) \quad . \quad (\text{III.3.40})$$

Damit lautet $F(\omega)$:

$$F(\omega) = F_{T1}(\omega_1) \cdot F_{01}(\omega_1) \cdot \left[\prod_{\substack{(i,j) \in M_L \\ x_{ij} \neq 1}} \frac{1}{x_{ij}} \right] \cdot F_{02}(\omega_2) \cdot F_{T2}(\omega_2) \quad .$$

Es seien einige neue Abkürzungen eingeführt:

$$F_{T1}(\omega_1) = F_{T1}(\omega_1) \cdot F_{01}(\omega_1) \quad , \quad (\text{III.3.41})$$

$$F_{T2}(\omega_2) = F_{02}(\omega_2) \cdot F_{T2}(\omega_2) \quad , \quad (\text{III.3.42})$$

$$F_0(\omega) = \prod_{\substack{(i,j) \in M_L \\ x_{ij} \neq 1}} \frac{1}{x_{ij}} \quad . \quad (\text{III.3.43})$$

Damit lautet $F(\omega)$:

$$F(\omega) = F_{T1}(\omega_1) \cdot F_0(\omega) \cdot F_{T2}(\omega_2) \quad . \quad (\text{III.3.44})$$

Mit Gl.(III.3.44) und der neuen Form von K_2 gemäß Gl.(III.3.35) wird aus Gl.(III.3.27):

$$T(\omega_1) = \frac{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} K_2(\omega_2) \cdot F_{T1}(\omega_1) \cdot F_0(\omega) \cdot F_{T2}(\omega_2)}{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} F_{T1}(\omega_1) \cdot F_0(\omega) \cdot F_{T2}(\omega_2)} \quad .$$

$F_{T_1}(\omega_1)$ kann man in Zähler und Nenner vor die Summe nehmen und kürzen. Damit lautet $T(\omega_1)$:

$$T(\omega_1) = \frac{\sum_{\omega \in \mathcal{O}(\omega_1)} K_1(\omega_2) \cdot F_{T_2}(\omega_2) \cdot F_0(\omega)}{\sum_{\omega \in \mathcal{O}(\omega_1)} F_{T_2}(\omega_2) \cdot F_0(\omega)} \quad . \quad (\text{III.3.45})$$

Die hierin verwendeten Abkürzungen sind in den Gl.'en (III.3.35), (III.3.42) und (III.3.43) angegeben.

Schritt 2: Reduzieren auf einfachere Zählentupel

$\mathcal{O}(\omega_1)$ von Gl.(III.3.45) ist gemäß Abschn. III.1.2 als Menge derjenigen ω definiert, die im Teil 1 den Zustand ω_1 nach sich ziehen. Für ω_1 gilt gemäß Gl.(III.1.3):

$$\omega_1 = (x_{1ij}, (i,j) \in \mathcal{M}^1; x_{1i0}, i \in \mathcal{I}_Q)$$

mit

$$x_{1ij} = x_{ij}, \quad (i,j) \in \mathcal{M}^1$$

und

$$x_{1i0} = \sum_{j \in \mathcal{I}_E} x_{ij}, \quad i \in \mathcal{I}_Q \quad .$$

Die Größen x_{ij} bzw. x_{1ij} mit $(i,j) \in \mathcal{M}^1$ kommen in den Termen von Zähler und Nenner von $T(\omega_1)$ nicht vor. Zählentupel ω , die sich nur in den $x_{ij}, (i,j) \in \mathcal{M}^1$ unterscheiden, sind also für die Formel (III.3.45) äquivalent. Man kann sie zu Äquivalenzklassen zusammenfassen. Mit anderen Worten: Man braucht nur noch folgende Rest-Zählentupel zu betrachten:

$$\omega_2^{\#} = (x_{ij}, (i,j) \in (\mathcal{M}_L \cup \mathcal{M}^{\#})) \quad . \quad (\text{III.3.46})$$

Jedem $\omega \in \mathcal{O}(\omega_1)$ ist also ein ω_2'' zugeordnet. Damit ist der Menge $\mathcal{O}(\omega_1)$ eine Menge von ω_2'' zugeordnet. Diese Menge sei mit $\overline{\mathcal{O}}(\omega_1)$ bezeichnet. $\overline{\mathcal{O}}(\omega_1)$ ist für alle diejenigen ω_1 , die sich nur in den x_{ij} , $(i,j) \in \mathcal{M}'$ unterscheiden, dieselbe Menge. Von ω_1 sind nur die Komponenten x_{i_0} , $i \in \mathcal{I}_Q$ maßgebend dafür, welche Zählentupel ω_2'' die Menge $\overline{\mathcal{O}}(\omega_1)$ enthält. $\overline{\mathcal{O}}(\omega_1)$ hängt also nur vom Zählentupel

$$\overline{\omega}_1 = (x_{i_0}, i \in \mathcal{I}_Q) \quad (\text{III.3.47})$$

ab. Deshalb kann man $\overline{\mathcal{O}}(\overline{\omega}_1)$ statt $\overline{\mathcal{O}}(\omega_1)$ schreiben.

Damit lautet Gl.(III.3.45):

$$T(\omega_1) = \frac{\sum_{\omega_2'' \in \overline{\mathcal{O}}(\overline{\omega}_1)} K_2(\omega_2) \cdot F_{T_2}(\omega_2) \cdot F_0(\omega)}{\sum_{\omega_2'' \in \overline{\mathcal{O}}(\overline{\omega}_1)} F_{T_2}(\omega_2) \cdot F_0(\omega)} \quad (\text{III.3.48})$$

$F_0(\omega)$ ist gemäß Gl.(III.3.43) nur von den x_{ij} , $(i,j) \in \mathcal{M}_L$ abhängig. Das aus diesen x_{ij} gebildete Zählentupel sei mit $\overline{\omega}$ bezeichnet:

$$\overline{\omega} = (x_{ij}, (i,j) \in \mathcal{M}_L) \quad (\text{III.3.49})$$

Damit kann man in Gl.(III.3.48)

$$F_0(\overline{\omega}) \text{ statt } F_0(\omega) \quad (\text{III.3.50})$$

schreiben. Nun wird die Menge $\overline{\mathcal{O}}(\overline{\omega}_1)$ in Untermengen zerlegt. Die ω_2'' jeder Untermenge sollen sich nur in den x_{ij} , $(i,j) \in \mathcal{M}''$ unterscheiden, dagegen nicht in den x_{ij} , $(i,j) \in \mathcal{M}_L$.

Die Untermengen sind also durch Zählentupel $(x_{ij}, (i,j) \in \mathcal{M}_L)$ gekennzeichnet und seien mit $\overline{\mathcal{O}}(\overline{\omega})$ bezeichnet.

Die Menge der Zählentupel $\overline{\omega}$, zu denen es (nicht leere)

Mengen $\overline{\tilde{\alpha}}(\bar{\omega})$ gibt, sei $\tilde{\alpha}(\bar{\omega}_1)$. Damit ist

$$\bigcup_{\bar{\omega} \in \tilde{\alpha}(\bar{\omega}_1)} \left[\bigcup_{\omega_2^* \in \overline{\tilde{\alpha}}(\bar{\omega})} \omega_2^* \right] = \bigcup_{\omega_2^* \in \overline{\tilde{\alpha}}(\bar{\omega}_1)} \omega_2^* . \quad (\text{III.3.51})$$

Hiermit und mit Gl.(III.3.50) wird aus Gl.(III.3.48):

$$T(\omega_1) = \frac{\sum_{\bar{\omega} \in \tilde{\alpha}(\bar{\omega}_1)} \left\{ F_0(\bar{\omega}) \cdot \sum_{\omega_2^* \in \overline{\tilde{\alpha}}(\bar{\omega})} K_2(\omega_2) \cdot F_{T_2}(\omega_2) \right\}}{\sum_{\bar{\omega} \in \tilde{\alpha}(\bar{\omega}_1)} \left\{ F_0(\bar{\omega}) \cdot \sum_{\omega_2^* \in \overline{\tilde{\alpha}}(\bar{\omega})} F_{T_2}(\omega_2) \right\}} . \quad (\text{III.3.52})$$

Nun werden folgende neue Abkürzungen eingeführt:

$$F_{T_2}^{**}(\bar{\omega}) = \sum_{\omega_2^* \in \overline{\tilde{\alpha}}(\bar{\omega})} \left[K_2(\omega_2) \cdot F_{T_2}(\omega_2) \right] \quad (\text{III.3.53})$$

und

$$F_{T_2}^*(\bar{\omega}) = \sum_{\omega_2^* \in \overline{\tilde{\alpha}}(\bar{\omega})} F_{T_2}(\omega_2) . \quad (\text{III.3.54})$$

Das Argument von $F_{T_2}^{**}$ und $F_{T_2}^*$ ist jeweils $\bar{\omega}$. $\bar{\omega}$ ist das Zehlentupel der x_{ij} , $(i,j) \in \mathcal{M}_L$. Diese x_{ij} kommen in ω_2 und damit in $K_2(\omega_2)$ und $F_{T_2}(\omega_2)$ nur innerhalb der

Summen

$$x_{20j} = \sum_{i \in \mathcal{I}_Q} x_{ij}, \quad j \in \mathcal{I}_E$$

vor (vergl. die Gl.'en (III.2.3) und (III.2.4b)). Damit hängen $F_{T_2}^{**}(\bar{\omega})$ und $F_{T_2}^*(\bar{\omega})$ nur von den x_{20j} , $j \in \mathcal{I}_E$ ab. Die aus diesen x_{20j} gebildeten Zählentupel seien $\bar{\omega}_2$ genannt:

$$\bar{\omega}_2 = (x_{20j}, j \in \mathcal{I}_E) \quad . \quad (\text{III.3.55})$$

Damit kann man schreiben

$$F_{T_2}^{**}(\bar{\omega}_2) \text{ statt } F_{T_2}^{**}(\bar{\omega}) \quad (\text{III.3.56})$$

und

$$F_{T_2}^*(\bar{\omega}_2) \text{ statt } F_{T_2}^*(\bar{\omega}) \quad . \quad (\text{III.3.57})$$

Aus Gl.(III.3.52) wird also:

$$T(\omega_1) = \frac{\sum_{\bar{\omega} \in \tilde{\Omega}(\bar{\omega}_1)} [F_0(\bar{\omega}) \cdot F_{T_2}^{**}(\bar{\omega}_2)]}{\sum_{\bar{\omega} \in \tilde{\Omega}(\bar{\omega}_1)} [F_0(\bar{\omega}) \cdot F_{T_2}^*(\bar{\omega}_2)]} \quad . \quad (\text{III.3.58})$$

Die hierin verwendeten Abkürzungen sind in den Gl.'en (III.3.50), (III.3.43), (III.3.56), (III.3.53), (III.3.57), (III.3.54) angegeben. Die verwendeten Zählentupel sind in den Gl.'en (III.3.47), (III.3.49) und (III.3.55) definiert.

Schritt 3: Umordnen der Summen in Zähler und Nenner

Man denke sich die Summanden von Zähler und Nenner der Gl. (III.3.58) aufgeschrieben und dann nach Zählentupeln $\bar{\omega}_2$ geordnet. Es wird dabei im allgemeinen zu jedem Zählentupel $\bar{\omega}_2$ mehrere Terme geben. Es ist $\tilde{\alpha}(\bar{\omega}_1)$ die Menge all derjenigen $\bar{\omega}$, die ein vorgegebenes $\bar{\omega}_1$ nach sich ziehen. Diese $\bar{\omega}$ nach $\bar{\omega}_2$ geordnet bedeutet: Es ist jeweils die Menge all derjenigen $\bar{\omega}$ zu bilden, die außer einem bestimmten $\bar{\omega}_1$ auch noch ein bestimmtes $\bar{\omega}_2$ nach sich ziehen (gemäß den Gl.'en (III.1.4b) bzw. (III.2.4b)). Diese Menge sei mit $\xi_1(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ bezeichnet. Weiter sei $\bar{\Omega}_2$ die Menge aller $\bar{\omega}_2$. x sei die Zahl belegter Leitungen im Bündel Nr. L (Verbindungs-bündel):

$$x = \overline{\sum_{(i,j) \in \mathcal{M}_L} x_{ij}} = \overline{\sum_{i \in \mathcal{I}_Q} x_{i10}} = \overline{\sum_{j \in \mathcal{I}_E} x_{20j}} \quad . \quad (\text{III.3.59})$$

$\xi_1(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ ist nur für solche Paare $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ nicht leer, die derselben Anzahl belegter Leitungen im Verbindungs-bündel entsprechen, für die also gemäß Gl. (III.3.59) gilt:

$$\overline{\sum_{i \in \mathcal{I}_Q} x_{i10}} = x = \overline{\sum_{j \in \mathcal{I}_E} x_{20j}} \quad . \quad (\text{III.3.60})$$

Wenn z.B. der Wert von $\bar{\omega}_1$ vorgegeben ist, ergibt sich x aus

$$x = \overline{\sum_{i \in \mathcal{I}_Q} x_{i10}} \quad .$$

$\xi_1(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ ist dann nur für solche $\bar{\omega}_2 \in \bar{\Omega}_2$ nicht leer, für die gilt:

$$\overline{\sum_{j \in \mathcal{I}_E} x_{20j}} = x \quad .$$

Die Untermenge dieser $\bar{\omega}_2$ sei mit $\bar{\Omega}_2^*$ bezeichnet. Damit gilt für $\tilde{\Omega}(\bar{\omega}_1)$ folgende Zerlegung:

$$\bigcup_{\bar{\omega} \in \tilde{\Omega}(\bar{\omega}_1)} \bar{\omega} = \bigcup_{\bar{\omega}_2 \in \bar{\Omega}_2^*} \left[\bigcup_{\bar{\omega} \in \mathcal{E}_1(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)} \bar{\omega} \right]. \quad (\text{III.3.61})$$

Hiermit wird aus Gl.(III.3.56):

$$T(\omega_1) = \frac{\sum_{\bar{\omega}_2 \in \bar{\Omega}_2^*} \sum_{\bar{\omega} \in \mathcal{E}_1(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)} [F_0(\bar{\omega}) \cdot F_{T_2}^{**}(\bar{\omega}_2)]}{\sum_{\bar{\omega}_2 \in \bar{\Omega}_2^*} \sum_{\bar{\omega} \in \mathcal{E}_1(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)} [F_0(\bar{\omega}) \cdot F_{T_2}^*(\bar{\omega}_2)]} \quad .$$

Anders geschrieben:

$$T(\omega_1) = \frac{\sum_{\bar{\omega}_2 \in \bar{\Omega}_2^*} [F_{T_2}^{**}(\bar{\omega}_2) \cdot k_0(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)]}{\sum_{\bar{\omega}_2 \in \bar{\Omega}_2^*} [F_{T_2}^*(\bar{\omega}_2) \cdot k_0(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)]} \quad . \quad (\text{III.3.62})$$

Hierin ist folgende Abkürzung verwendet:

$$k_0(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = \sum_{\bar{\omega} \in \mathcal{E}_1(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)} F_0(\bar{\omega}) \quad . \quad (\text{III.3.63})$$

Die in den Gl.'en (III.3.62), (III.3.63) verwendeten Abkürzungen sind in den Gl.'en (III.3.53), (III.3.50), (III.3.43), (III.3.54) und (III.3.42) zu finden.

Schritt 4: Ende der Umformung des Ausdrucks $T(\omega_1)$

Die in Gl.(III.3.63) definierten Koeffizienten $k_0(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$

werden näher untersucht. Aus Gl.(III.3.63) wird mit Gl.(III.3.43):

$$k_o(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = \sum_{\bar{\omega} \in \mathcal{E}_1(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)} \frac{(i,j) \in \mathcal{M}_L}{\parallel} \frac{1}{x_{ij}!} .$$

Statt $\frac{(i,j) \in \mathcal{M}_L}{\parallel}$ kann man auch schreiben $\frac{i \in \mathcal{I}_A}{\parallel} \frac{j \in \mathcal{I}_E}{\parallel}$.
Demit ist:

$$k_o(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = \sum_{\bar{\omega} \in \mathcal{E}_1(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)} \frac{i \in \mathcal{I}_A}{\parallel} \frac{j \in \mathcal{I}_E}{\parallel} \frac{1}{x_{ij}!} . \quad (\text{III.3.64})$$

Nun ordnet man die x_{ij} in einer Matrix an. Sie hat soviel Spalten, wie $\mathcal{I}_E$ Elemente enthält und soviel Zeilen, wie $\mathcal{I}_A$ Elemente enthält. Die Zeilensummen sind (vergl. Gl.(III.1.4b)) die x_{1i_0} , $i \in \mathcal{I}_A$. Die Spaltensummen sind (vergl. Gl.(III.2.4b)) die x_{2j_0} , $j \in \mathcal{I}_E$. Die Zeilensummen sind also die Komponenten von $\bar{\omega}_1$, die Spaltensummen sind die Komponenten von $\bar{\omega}_2$. Die Summe aller Elemente der Matrix ist x und ist gleich der Summe der Zeilensummen und gleichzeitig gleich der Summe der Spaltensummen (vergl. Gl.(III.3.60)). Für das Beispiel von Bild III.1 gilt $\bar{\omega} = (x_{22}, x_{23}, x_{32}, x_{33})$. Die Matrix ist in Bild A 2.1 dargestellt.

	$j=2$	$j=3$	
$i=2$	$x_{2,2}$	$x_{2,3}$	$\Sigma = x_{1,2,0}$
$i=3$	$x_{3,2}$	$x_{3,3}$	$\Sigma = x_{1,3,0}$
	$\Sigma = x_{2,0,2}$	$\Sigma = x_{2,0,3}$	

$\bar{\omega}_1 = (x_{1,2,0}, x_{1,3,0})$

$\bar{\omega}_2 = (x_{2,0,2}, x_{2,0,3})$

Bild A 2.1 Matrix für den Koeffizienten k_o im Beispiel von Bild III.1

Die Menge der Matrixelemente ist das Zahlentupel $\bar{\omega}$.
 $k_0(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ für ein vorgegebenes Paar $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ zu berechnen, bedeutet folgende Aufgabe: Für die Matrix sind die Zeilen- und Spaltensummen vorgegeben. Es sind nichtnegative ganze Zahlen, für die natürlich gilt

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_A} x_{1io} = \sum_{j \in \mathcal{I}_E} x_{2oj} \quad .$$

Man hat nun alle Matrizen mit ganzzahligen nichtnegativen Elementen zu suchen, die die vorgegebenen Zeilen- und Spaltensummen haben. Für jede gefundene Matrix hat man den Wert des Produkts der Kehrwerte der Fakultäten ihrer Elemente zu berechnen. Diese Produkte sind für alle gefundenen Matrizen zu addieren. Damit hat man den Wert von $k_0(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ berechnet.

Wie in Schritt 5 dieses Abschnitts 2 dieses Anhangs A 2 noch gezeigt wird, kann man für die rechte Seite von Gl.(III.3.64) eine einfache geschlossene Formel angeben. Sie lautet:

$$\sum_{\bar{\omega} \in \mathcal{E}_1(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)} \left[\prod_{i \in \mathcal{I}_A} \prod_{j \in \mathcal{I}_E} \frac{1}{x_{ij}!} \right] = [x!] \cdot \left[\prod_{i \in \mathcal{I}_A} \frac{1}{x_{1io}!} \right] \cdot \left[\prod_{j \in \mathcal{I}_E} \frac{1}{x_{2oj}!} \right] \quad . \quad (\text{III.3.65})$$

Das x hierin berechnet sich gemäß Gl.(III.3.60). Damit hat $k_0(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ die Form:

$$k_0(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = f_1(\bar{\omega}_1) \cdot f_2(\bar{\omega}_2) \quad (\text{III.3.66})$$

mit

$$f_1(\bar{\omega}_1) = [x!] \cdot \left[\prod_{i \in \mathcal{I}_A} \frac{1}{x_{1io}!} \right] \quad (\text{III.3.67a})$$

und

$$f_2(\bar{\omega}_2) = \prod_{j \in \mathcal{I}_E} \frac{1}{x_{2oj}!} \quad . \quad (\text{III.3.67b})$$

Nun wird Gl.(III.3.66) in die Gl.(III.3.62) eingesetzt. $f_1(\bar{\omega}_1)$ kann man in Zähler und Nenner vor die Summe nehmen und kürzen, weil (siehe Gl.(III.3.47)) $\bar{\omega}_1$ für vorgegebenes ω_1 festen Wert hat. Es ergibt sich:

$$T(\omega_1) = \frac{\sum_{\bar{\omega}_2 \in \bar{\Omega}_2^1} [F_{T2}^{**}(\bar{\omega}_2) \cdot f_2(\bar{\omega}_2)]}{\sum_{\bar{\omega}_2 \in \bar{\Omega}_2^x} [F_{T2}^*(\bar{\omega}_2) \cdot f_2(\bar{\omega}_2)]} \quad , \quad \omega_1 \in \Omega_1 \quad .$$

Der Quotient auf der rechten Seite ist eine Funktion von x und sei in Zukunft mit $\xi_o(x)$ bezeichnet:

$$\xi_o(x) = \frac{\sum_{\bar{\omega}_2 \in \bar{\Omega}_2^x} [F_{T2}^{**}(\bar{\omega}_2) \cdot f_2(\bar{\omega}_2)]}{\sum_{\bar{\omega}_2 \in \bar{\Omega}_2^x} [F_{T2}^*(\bar{\omega}_2) \cdot f_2(\bar{\omega}_2)]} \quad , \quad \omega_1 \in \Omega_1 \quad . \quad (\text{III.3.68})$$

Das x hierbei ist die Zahl belegter Leitungen und Verbindungsbündel zwischen Teil 1 und Teil 2, also $x = x_{1BL}(\omega_1)$ (vergleiche Gl.(III.3.60)). Damit ist

$$T(\omega_1) = \xi_o(x_{1BL}(\omega_1)) \quad , \quad \omega_1 \in \Omega_1 \quad . \quad (\text{III.3.69})$$

$T(\omega_1)$ hängt also nur von x_{1BL} , der Zahl belegter Leitungen im Verbindungsbündel Nr. L ab. Das zu zeigen war der Zweck dieses Abschnittes A 2.2.

Schritt 5: Anhang zu Schritt 4

In diesem Schritt wird die Richtigkeit von Gl.(III.3.65) gezeigt.

Um übersichtliche Ausdrücke zu bekommen, wird eine Umbenennung vorgenommen: Es seien die

Matrizelemente x_{ij} , $i = 1, \dots, a$, $j = 1, \dots, b$;

Spaltensummen $y_j = \sum_{i=1}^a x_{ij} \quad , \quad j = 1, \dots, b \quad ; \quad (III.3.67)$

Zeilensummen $z_i = \sum_{j=1}^b x_{ij} \quad , \quad i = 1, \dots, a \quad . \quad (III.3.71)$

Statt $\bar{\omega}$ schreiben wir $\omega = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{ab})$.
 " $\bar{\omega}_1$ " " $\omega_1 = (z_1, z_2, \dots, z_a)$.
 " $\bar{\omega}_2$ " " $\omega_2 = (y_1, y_2, \dots, y_b)$.
 " $\bar{\epsilon}_1(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ " " $\epsilon(\omega_1, \omega_2)$.

Damit hat die Matrix, für die in Bild A 2.1 ein Beispiel angegeben ist, im allgemeinen Fall nun die Form von Bild A 2.2.

	1		j		b	
1	x_{11}		x_{1j}		x_{1b}	$\Sigma = z_1$
⋮						
⋮						
i	x_{i1}		x_{ij}		x_{ib}	$\Sigma = z_i$
⋮						
⋮						
a	x_{a1}		x_{aj}		x_{ab}	$\Sigma = z_a$
	$\Sigma = y_1$		$\Sigma = y_j$		$\Sigma = y_b$	

Bild A 2.2 Die allgemeine Matrix

Es gilt also statt Gl.(III.3.59):

$$x = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b x_{ij} = \sum_{i=1}^a z_i = \sum_{j=1}^b y_j \quad . \quad (III.3.72)$$

Damit lautet die zu beweisende Gl.(III.3.65) hier:

$$\sum_{\omega \in \mathfrak{E}(\omega_1, \omega_2)} \left[\prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{1}{x_{ij}!} \right] = [x!] \cdot \left[\prod_{i=1}^a \frac{1}{z_i!} \right] \cdot \left[\prod_{j=1}^b \frac{1}{y_j!} \right] . \quad (\text{III.3.73})$$

Die Richtigkeit wird durch Umformung der linken Seite dieser Gleichung, die mit S bezeichnet sei, gezeigt.
 S lautet:

$$S = \sum_{\omega \in \mathfrak{E}(\omega_1, \omega_2)} \left[\prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{1}{x_{ij}!} \right] . \quad (\text{III.3.74})$$

Mit C_i sei das Produkt der Kehrwerte der Fakultäten der i -ten Zeile der Matrix von Bild A 2.2 bezeichnet:

$$C_i = \prod_{j=1}^b \frac{1}{x_{ij}!} , \quad i = 1, \dots, a . \quad (\text{III.3.75})$$

Dann lautet Gl.(III.3.74):

$$S = \sum_{\omega \in \mathfrak{E}(\omega_1, \omega_2)} \left[\prod_{i=1}^a C_i \right] . \quad (\text{III.3.76})$$

Die Summierung $\omega \in \mathfrak{E}(\omega_1, \omega_2)$ besagt, daß alle Matrizen mit ganzzahligen nichtnegativen Elementen gesucht werden sollen, die die vorgegebenen Zeilen- und Spaltensummen haben. Per Definition gilt:

$$\frac{1}{m!} = 0 \quad \text{für } m < 0, m \text{ ganzzahlig} . \quad (\text{III.3.77})$$

Es stört also nicht, wenn man statt der Menge $\mathcal{E}(\omega_1, \omega_2)$ eine Menge von $a \cdot b$ -Tupeln ω nimmt, die außer den $\omega \in \mathcal{E}(\omega_1, \omega_2)$ noch Zahlentupel ω enthält, bei denen wenigstens eine Komponente negativen Wert hat. Der entsprechende Summand in Gl. (III.3.76) hat nämlich für solche ω den Wert Null.

Das wird ausgenützt, um S zu berechnen: Man sucht ein Zahlentupel aus b ganzen Zahlen, dessen Summe gleich z_1 ist. Dieses liefert Werte für die erste Zeile der Matrix. Damit liegt auch der Wert von C_1 fest. Nun sucht man für die aus den Zeilen Nr. 2, 3, 4, ..., a bestehende Restmatrix alle Zahlenkombinationen, die die geforderten Zeilensummen $z_2, z_3, z_4, \dots, z_a$ und die geforderten Spaltensummen $y_1, y_2, \dots, y_b$ haben. Für alle diese Kombinationen berechnet man $\prod_{i=2}^a C_i$. Dann nimmt man ein anderes Zahlentupel aus b Zahlen für die erste Zeile der Matrix, erhält einen anderen Wert für C_1 , sucht wieder die Zahlentupel der Restmatrix und berechnet hierfür $\prod_{i=2}^a C_i$ usw. Auf diese Art werden alle Besetzungsmöglichkeiten für die erste Zeile durchgespielt, für die gilt

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1b} = z_1 \quad .$$

Damit wird

$$S = \sum_{\substack{x_{11} + \dots + x_{1b} = z_1}} \left[C_1 \left[\sum_{\text{Restmatrix}} \prod_{i=2}^a C_i \right] \right] .$$

Dabei spielt es wegen Gl. (III.3.77) keine Rolle, wenn beliebige Elemente der Matrix negativ werden.

Bezüglich der Restmatrix verfährt man wie für die ursprüngliche Matrix: In der obersten Zeile der Restmatrix legt man ein b -Tupel fest und sucht für die unteren Zeilen Zahlenkombinationen usw. Damit lautet S :

$$S = \sum_{z_1} \left[c_1 \cdot \sum_{z_2} \left[c_2 \cdot \sum_{z_3} \left[\dots \left[c_{a-3} \cdot \sum_{z_{a-2}} \left[c_{a-2} \cdot \sum_{z_{a-1}} \left[c_{a-1} \cdot c_a \right] \right] \dots \right] \right] \right] \right] . \quad (\text{III.3.78})$$

Dabei bedeutet z_i unter dem Summenzeichen, daß über alle b -Tupel $(x_{ij}, x_{i2}, \dots, x_{ib})$ summiert werden soll, für die gilt

$$\sum_{j=1}^b x_{ij} = z_i .$$

Nun sei die innerste Summe von Gl. (III.3.78) betrachtet. Bei ihr haben die Elemente der Zeilen $1, 2, \dots, a-2$ feste Werte. Für die Elemente der $(a-1)$ -ten Zeile werden jeweils b -Tupel vorgegeben und die zugehörigen Elemente der Zeile a gesucht. Sie ergeben sich aus der Summe der ersten $a-2$ Elemente jeder Spalte und den Spaltensummen $y_1, y_2, \dots, y_b$. Es ist:

$$\begin{aligned} y_j &= \sum_{i=1}^a x_{ij} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{a-2} x_{ij} \right] + x_{a-1j} + x_{aj} . \end{aligned}$$

Also:

$$y_j = \sum_{i=1}^{a-2} x_{ij} = x_{a-1,j} + x_{aj} \quad . \quad (\text{III.3.77})$$

Die linke Seite dieser Gleichung sei mit $y_j^!(1)$ bezeichnet. (Diese Bezeichnung wurde in Anlehnung an die später benötigte Summe $y_j^!(l)$ der untersten $l+1$ Elemente jeder Spalte gewählt.) Dann ist:

$$y_j^!(1) = x_{a-1,j} + x_{aj} \quad . \quad (\text{III.3.80})$$

Die innerste Summe in Gl. (III.3.78) sei mit S_{a-1} bezeichnet:

$$S_{a-1} = \sum_{z_{a-1}} C_{a-1} \cdot C_a \quad . \quad (\text{III.3.81a})$$

Demit lautet Gl. (III.3.78):

$$S = \sum_{z_1} \left[C_1 \cdot \sum_{z_2} \left[C_2 \cdot \sum_{z_3} \left[\dots \left[C_{a-3} \cdot \sum_{z_{a-2}} \left[C_{a-2} \cdot S_{a-1} \right] \dots \right] \right] \right] \right] . \quad (\text{III.3.81b})$$

Mit Gl. (III.3.75) wird aus Gl. (III.3.81a):

$$\begin{aligned} S_{a-1} &= \sum_{z_{a-1}} \left[\left[\prod_{j=1}^b \frac{1}{x_{a-1,j}!} \right] \cdot \left[\prod_{j=1}^b \frac{1}{x_{aj}!} \right] \right] \\ &= \sum_{z_{a-1}} \left[\prod_{j=1}^b \frac{1}{(x_{a-1,j}!) \cdot (x_{aj}!)} \right] \quad . \end{aligned}$$

Mit Gl. (III.3.80) wird:

$$S_{a-1} = \sum_{z_{a-1}} \left[\prod_{j=1}^b \frac{1}{(x_{a-1,j}!) \cdot (y_j^!(1) - x_{a-1,j}!)} \right] \quad .$$

Zähler und Nenner mit $y_j^1(1)!$ multipliziert ergibt:

$$S_{a-1} = \left[\prod_{j=1}^b \frac{1}{y_j^1(1)!} \right] \cdot S_{a-1}^1 \quad . \quad (\text{III.3.82})$$

Hierin ist S_{a-1}^1 folgende Abkürzung:

$$S_{a-1}^1 = \sum_{z_{a-1}} \left[\prod_{j=1}^b \left(\frac{y_j^1(1)}{x_{a-1,j}} \right) \right] \quad . \quad (\text{III.3.83})$$

S_{a-1}^1 wird weiter umgeformt mittels der folgenden Beziehung, deren Richtigkeit im Schritt 6 des Abschnitts 2 dieses Anhangs A 2 bewiesen wird. Sie lautet:

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_b=k} \left[\prod_{j=1}^b \binom{m_j}{k_j} \right] = \binom{\sum_{j=1}^b m_j}{k} \quad . \quad (\text{III.3.84})$$

Hiermit wird aus Gl.(III.3.83):

$$S_{a-1}^1 = \binom{\sum_{j=1}^b y_j^1(1)}{z_{a-1}} \quad . \quad (\text{III.3.85})$$

Für die in der rechten Seite dieser Gleichung enthaltene Summe gilt mit Gl.(III.3.80):

$$\sum_{j=1}^b y_j^1(1) = \sum_{j=1}^b x_{aj} + \sum_{j=1}^b x_{a-1,j} \quad .$$

Hieraus wird mit Gl.(III.3.71):

$$\sum_{j=1}^b y_j^1(1) = z_a + z_{a-1} \quad . \quad (\text{III.3.86})$$

Damit lautet Gl.(III.3.85):

$$S_{a-1}^1 = \binom{z_a + z_{a-1}}{z_{a-1}} \quad .$$

Umgeformt:

$$S_{a-1}^1 = \frac{(z_{a-1} + z_a)!}{(z_{a-1}!) \cdot (z_a!)} \quad . \quad (\text{III.3.87})$$

Hiermit und mittels Gl.(III.3.82) wird aus Gl.
(III.3.81b):

$$S = \sum_{z_1} \left[C_1 \cdot \sum_{z_2} \left[\dots \left[C_{a-3} \cdot \sum_{z_{a-2}} \left[C_{a-2} \cdot \left[\prod_{j=1}^b \frac{1}{y_j^1(1)!} \right] \cdot \frac{(z_{a-1} + z_a)!}{(z_{a-1}!) \cdot (z_a!)} \right] \dots \right] \right] .$$

Umgeformt:

$$S = \sum_{z_1} \left[C_1 \cdot \sum_{z_2} \left[\dots \left[C_{a-3} \cdot \frac{(z_{a-1} + z_a)!}{(z_{a-1}!) \cdot (z_a!)} \cdot \sum_{z_{a-2}} \left[C_{a-2} \cdot \prod_{j=1}^b \frac{1}{y_j^1(1)!} \right] \dots \right] \right] \quad . \quad (\text{III.3.88})$$

Nun sei die innerste Summe mit S_{a-2} bezeichnet:

$$S_{a-2} = \sum_{z_{a-2}} \left[C_{a-2} \cdot \prod_{j=1}^b \frac{1}{y_j^1(1)!} \right] \quad . \quad (\text{III.3.89})$$

In Verallgemeinerung von Gl.(III.3.80) sei mit $y_j^1(l)$ die Summe der $l+1$ untersten Elemente der j -ten Spalte der Matrix bezeichnet:

$$y_j^1(l) = \sum_{i=a-l}^a x_{ij} \quad . \quad (\text{III.3.90})$$

Dann gilt:

$$y_j^1(1) = y_j^1(2) - x_{a-2,j} \quad ,$$

und es wird aus Gl.(III.3.89):

$$S_{a-2} = \sum_{z_{a-2}} \left[C_{a-2} \cdot \prod_{j=1}^b \frac{1}{(y_j^1(2) - x_{a-2,j})!} \right] \quad . \quad (\text{III.3.91})$$

Nun wendet man für C_{a-2} Gl.(III.3.75) an, multipliziert unter dem Summenzeichen mit $(y_j^1(2)!)/(y_j^1(2)!)$ und erhält:

$$S_{a-2} = \left[\prod_{j=1}^b \frac{1}{y_j^1(2)!} \right] \cdot S'_{a-2} \quad . \quad (\text{III.3.92})$$

Hierin ist S'_{a-2} folgende Abkürzung:

$$S'_{a-2} = \sum_{z_{a-2}} \left[\prod_{j=1}^b \binom{y_j^1(2)}{x_{a-2,j}} \right] \quad . \quad (\text{III.3.93})$$

Analog zu Gl.(III.3.86) erhält man aus Gl.(III.3.90):

$$\sum_{j=1}^b y_j^1(l) = \sum_{\nu=a-l}^a z_{\nu} \quad . \quad (\text{III.3.94})$$

Nun wendet man Gl.(III.3.94) auf Gl.(III.3.93) an und erhält schließlich mit Gl.(III.3.94):

$$S'_{a-2} = \frac{(z_{a-2} + z_{a-1} + z_a)!}{(z_{a-2}!) \cdot ((z_{a-1} + z_a)!) } \quad . \quad (\text{III.3.95})$$

Hiermit und mittels der Gl.'en (III.3.92) und (III.3.89) wird aus Gl.(III.3.88)

$$S = \sum_{z_1} \left[C_1 \cdot \sum_{z_2} \left[\dots \left[C_{a-3} \cdot \left[\prod_{j=1}^b \frac{1}{y_j^1(2)!} \right] \cdot \frac{(z_{a-2} + z_{a-1} + z_a)!}{(z_{a-2}!) \cdot (z_{a-1}!) \cdot z_a!} \right] \dots \right] \right] \quad .$$

Die innerste Summe wird nun S_{a-1} genannt und analog zu S_{a-2} abgebaut usw. Damit wird schließlich:

$$S = \left[\prod_{j=1}^b \frac{1}{(y_j^{(a-1)})!} \right] \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^a z_i \right)!}{\prod_{i=1}^a [z_i!]} .$$

Nun gilt aber gemäß Gl.(III.3.90) und (III.3.70):

$$y_j^{(a-1)} = y_j .$$

Weiter ist gemäß Gl.(III.3.72)

$$\sum_{i=1}^a z_i = x .$$

Also ist:

$$S = \left[\prod_{j=1}^b \frac{1}{(y_j!) } \right] \cdot \frac{x!}{\prod_{i=1}^a [z_i!]} .$$

Umgeformt:

$$S = \left[x! \right] \cdot \left[\prod_{i=1}^a \frac{1}{z_i!} \right] \cdot \left[\prod_{j=1}^b \frac{1}{y_j!} \right] . \quad (\text{III.3.96})$$

Wie man leicht einsieht, gilt diese Gleichung auch in den trivialen Fällen $a=1$ und/oder $b=1$. Damit sind (siehe Gl.(III.3.74)) linke und rechte Seite von Gl.(III.3.73) identisch. Das war zu beweisen.

Schritt 6: Anhang zu Schritt 5

Es wird die Richtigkeit der Beziehung (III.3.84) bewiesen.

Die linke Seite von Gl.(III.3.84) sei mit V bezeichnet:

$$V = \sum_k \left(\binom{m_1}{k_1} \cdot \binom{m_2}{k_2} \cdot \dots \cdot \binom{m_b}{k_b} \right) \quad . \quad (\text{III.3.97})$$

Darin bedeutet das k unter dem Summenzeichen, daß die Summe für alle b -Tupel von ganzen Zahlen $(k_1, k_2, \dots, k_b)$ zu nehmen ist, deren Summe gleich k ist. Das Durchvariiieren der b -Tupel geschehe so, daß zuerst für vorgegebenes $k_1, k_2, \dots, k_{b-2}$ das Paar k_{b-1}, k_b durchvariiert wird. Dann wird für vorgegebenes $k_1, k_2, \dots, k_{b-3}$ das Paar $k_{b-2}, (k_{b-1}, k_b)$ durchvariiert usw. Sei

$$\sum_{j=l}^b k_j = K_l \quad . \quad (\text{III.3.98})$$

Dann wird aus Gl.(III.3.97):

$$V = \sum_{k_1+K_2=K_1} \sum_{k_2+K_3=K_2} \dots \sum_{k_{b-1}+K_b=K_{b-1}} \left(\binom{m_1}{k_1} \cdot \binom{m_2}{k_2} \cdot \dots \cdot \binom{m_b}{k_b} \right) \quad .$$

Durch Vorklammern wird:

$$V = \sum_{k_1+K_2=K_1} \binom{m_1}{k_1} \cdot \left[\sum_{k_2+K_3=K_2} \binom{m_2}{k_2} \cdot \left[\dots \binom{m_{b-2}}{k_{b-2}} \cdot \left[\sum_{k_{b-1}+K_b=K_{b-1}} \left[\binom{m_{b-1}}{k_{b-1}} \cdot \binom{m_b}{k_b} \right] \dots \right] \right] \right] \quad .$$

In der innersten Summe kann man (vergl. Gl.(III.3.98) K_b statt k_b schreiben. Mit der allgemein bekannten Beziehung

$$\sum_{a+b=r} \left[\binom{m}{a} \cdot \binom{n}{b} \right] = \binom{m+n}{r} \quad (\text{III.3.99})$$

wird die innerste Summe von V zu $\binom{m_{b-1}+m_b}{K_{b-1}}$.

In der neuen Form von V baut man die nun innerste Summe wieder mit Gl.(III.3.99) ab zu

$$\binom{m_{b-2}+m_{b-1}+m_b}{K_{b-2}}$$

und so weiter und erhält:

$$V = \binom{m_1 + \dots + m_b}{K_1} .$$

Gemäß Gl.(III.3.98) ist aber K_1 gleich $k_1 + \dots + k_b$, also gleich k . Damit ist

$$V = \left(\frac{\sum_{j=1}^b m_j}{k} \right) . \quad (\text{III.3.100})$$

Also sind linke und rechte Seite von Gl.(III.3.84) identisch. Das war zu zeigen.

A 2. 3 Die neue Form von $\phi_{iio}(\omega_i)$

Wie in Abschnitt 2 dieses Anhangs A 2 gezeigt wurde, hängt der Term $T(\omega_i)$ von Gl.(III.3.25) in besonders einfacher Weise von ω_i ab: Gemäß Gl.(III.3.69) ist:

$$T(\omega_i) = \xi_0(x_{iBL}(\omega_i)) ,$$

wobei $\xi_0(x)$ die in Gl.(III.3.68) angegebene Funktion ist. Damit wird aus Gl.(III.3.25):

$$\phi_{iio}(\omega_i) = p_{io} \cdot \left[\frac{1 \in \mathcal{K}_{io}}{\prod} \xi_i(x_{iBL}(\omega_i)) \right] \cdot \xi_0(x_{iBL}(\omega_i)), \quad i \in \mathcal{I}_Q, \omega_i \in \Omega_i . \quad (\text{III.3.101})$$

Um eine, auch für Zehlentupel $\omega_i \notin \Omega_i, \omega_i \in \Omega_{i0}$, gültige Definition für $\phi_{iio}(\omega_i)$ zu schaffen, wird analog zu

Gl.(II.2.11b) folgende Funktion eingeführt:

$$b_{1io}(\omega_1) = \begin{cases} 0 & \text{für solche Zahlentupel } \omega_1, \text{ bei denen} \\ & \text{entweder der Ausdruck} \\ & p_{1o} \cdot \left[\frac{1 \in \mathcal{N}_{1o}}{\prod} \zeta_i(x_{1B_i}(\omega_1)) \right] \cdot \xi_o(x_{1BL}(\omega_1)) \\ & \text{gleich Null ist} \\ & \text{oder wenigstens eine Komponente von} \\ & \omega_1 \text{ negativen Wert hat,} \\ = 1 & \text{sonst,} \end{cases} \quad i \in \mathcal{I}_Q. \quad (\text{III.3.102})$$

Damit haben die Geburtskoeffizienten der Komponenten X_{1io} , $i \in \mathcal{I}_Q$ des Prozesses $X_t(t)$ folgende Form:

$$\phi_{1io}(\omega_1) = p_{1o} \cdot \left[\frac{1 \in \mathcal{N}_{1o}}{\prod} \zeta_i(x_{1B_i}(\omega_1)) \right] \cdot \xi_o(x_{1BL}(\omega_1)) \cdot b_{1io}(\omega_1), \quad i \in \mathcal{I}_Q, \omega_1 \in \mathcal{Q}_{1e}. \quad (\text{III.3.103})$$

Dies ist das Ergebnis der Umformung von Gl.(III.1.11b). ξ_o ist in Gl.(III.3.68) angegeben; es wird später jedoch eine andere, in Abschn. A 2.4 hergeleitete Form von ξ_o verwendet werden.

A 2. 4 Die endgültige Form von $\xi_o(x)$

Es sei nun noch eine Rechnung angefügt, in der $\xi_o(x)$ auf die später benötigte Form gebracht wird.

$\xi_o(x)$ ist in Gl.(III.3.68) gegeben. Die dort vorkommenden Funktionen $F_{T_2}^{**}(\bar{\omega})$, $F_{T_2}^*(\bar{\omega})$ und $f_2(\bar{\omega})$ sind in den Gl.'en (III.3.53), (III.3.54) und (III.3.67b) angegeben. (Man beachte die Gl.'en (III.3.56) und (III.3.57)!)

Es werden zunächst die Gl.'en (III.3.53) und (III.3.54) betrachtet. Dort wird jeweils über alle $\omega_2^n \in \bar{\mathcal{A}}(\bar{\omega})$ summiert. ω_2^n ist in Gl.(III.3.46) definiert und $\bar{\omega}$ in Gl. (III.3.49). $\bar{\mathcal{A}}(\bar{\omega})$ ist die Menge aller ω_2^n , die $\bar{\omega}$ nach sich

ziehen. In den Gl.'en (III.3.53) und (III.3.54) stehen Summanden, die von ω_2 abhängen. Zu summieren ist über $\omega_2^* \in \overline{\Omega}(\bar{\omega})$. Die Elemente von $\overline{\Omega}(\bar{\omega})$ entstehen für ein gegebenes $\bar{\omega}$ so, daß man zum Zählentupel $\bar{\omega} = (x_{ij}, (i, j) \in \mathcal{M}_L)$ alle möglichen Zählentupel $(x_{ij}, (i, j) \in \mathcal{M})$ sucht. "Möglich" bedeutet hier "wirklich vorkommenden Belegungszuständen ω der VSt entsprechend". Die Argumente $\omega_2 = (x_{2ij}, (i, j) \in \mathcal{M}''; x_{2oj}, j \in \mathcal{J}_E)$ der Summanden von Gl. (III.3.53), (III.3.54) erhält man dann mittels Gl. (III.2.4a,b) aus den $\omega_2^* = (x_{ij}, (i, j) \in (\mathcal{M}_L \cup \mathcal{M}''))$.

Genau dieselbe Menge von Argumenten ω_2 erhält man, wenn man zu einem gegebenen $\bar{\omega}$ mittels Gl. (III.2.4b) das Zählentupel $\bar{\omega}_2 = (x_{2oj}, j \in \mathcal{J}_E)$ berechnet und dann dazu alle möglichen Zählentupel $(x_{ij}, (i, j) \in \mathcal{M}'')$ sucht. Hat man - wie in Gl. (III.3.68) - diese Argumentmenge für ein vorgegebenes $\bar{\omega}_2$ zu suchen, dann vereinfacht sich die Aufgabe noch: Zum vorgegebenen Zählentupel $\bar{\omega}_2$ sind alle möglichen Zählentupel $(x_{ij}, (i, j) \in \mathcal{M}'')$ zu suchen. Die so entstehende Menge von ω_2 sei mit $\mathcal{Q}_2(\bar{\omega}_2)$ bezeichnet. Damit kann man in den Gl.'en (III.3.53), (III.3.54) anstelle von $\omega_2^* \in \overline{\Omega}(\bar{\omega})$ auch über $\omega_2 \in \mathcal{Q}_2(\bar{\omega}_2)$ summieren. Mit den Gl.'en (III.3.56), (III.3.57) wird schließlich

$$F_{T2}^{**}(\bar{\omega}_2) = \sum_{\omega_2 \in \mathcal{Q}_2(\bar{\omega}_2)} \left[K_2(\omega_2) \cdot F_{T2}(\omega_2) \right] \quad (\text{III.3.104})$$

und

$$F_{T2}^*(\bar{\omega}_2) = \sum_{\omega_2 \in \mathcal{Q}_2(\bar{\omega}_2)} F_{T2}(\omega_2) \quad . \quad (\text{III.3.105})$$

Mit diesen beiden Gl.'en und Gl. (III.3.67b) erhält man aus Gl. (III.3.68) nach Umformung:

$$\xi_0(x) = \frac{\sum_{\bar{\omega}_2 \in \bar{\Omega}_2^x} \sum_{\omega_2 \in \bar{\Omega}_2^x(\bar{\omega}_2)} \left[K_2(\omega_2) \cdot F_{T2}(\omega_2) \cdot \prod_{j \in \bar{J}_E} \frac{1}{x_{2oj}!} \right]}{\sum_{\bar{\omega}_2 \in \bar{\Omega}_2^x} \sum_{\omega_2 \in \bar{\Omega}_2^x(\bar{\omega}_2)} \left[F_{T2}(\omega_2) \cdot \prod_{j \in \bar{J}_E} \frac{1}{x_{2oj}!} \right]} \quad (III.3.106)$$

Statt der Doppelsumme kann man $\sum_{\omega_2 \in \bar{\Omega}_2^x}$ schreiben. Hierin ist $\bar{\Omega}_2^x$ die Menge all derjenigen ω_2 , die x belegte Leitungen im Verbindungsbündel zwischen Teil 1 und Teil 2 bewirken:

$$\bar{\Omega}_2^x = \{ \omega_2 : x_{2BL}(\omega_2) = x \} \quad (III.3.107)$$

Mittels der Gl.'en (III.3.35), (III.3.42), (III.3.38), (III.3.34) und (III.3.32c) erhält man schließlich:

$$\xi_0(x) = \frac{\sum_{\omega_2 \in \bar{\Omega}_2^x} \left[\sum_{j \in \bar{J}_E} p_{oj} \cdot \prod_{l \in \bar{M}_{oj}} \zeta_l(x_{2BL}(\omega_2)) \cdot F_2'(\omega_2) \right]}{\sum_{\omega_2 \in \bar{\Omega}_2^x} F_2'(\omega_2)} \quad (III.3.108)$$

Hierin ist folgende Abkürzung verwendet:

$$F_2'(\omega_2) = \left[\prod_{j \in \bar{J}_E} \frac{(p_{oj})^{x_{2oj}}}{x_{2oj}!} \right] \cdot \left[\prod_{(i,j) \in \bar{M}''} \left(\frac{p_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \right)^{x_{2ij}} \cdot \frac{1}{x_{2ij}!} \right] \cdot \left[\prod_{\nu=0}^{l \in \bar{M}''} \frac{x_{2BL}(\omega_2)^{\nu-1}}{\nu!} \zeta_l(\nu) \right] \quad (III.3.109)$$

Die Gl.'en (III.3.108), (III.3.109) geben die neue und in Abschn. III verwendete Form von $\xi_0(x)$ an.

A 2. 5 Umformung der Gleichung (III.1.12b)

In diesem Abschnitt wird Gl.(III.1.12b) mit Hilfe der Voraussetzungen (III.3.1) und (III.3.2) umgeformt.

Mit Gl.(II.2.13) wird aus Gl.(III.1.12b):

$$\theta_{iio}(\omega_1) = \frac{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \varepsilon_{ij} \cdot x_{ij} \cdot b_{ij}(\omega_{ij}^-) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} P(\omega)}, \quad \omega_1 \in \Omega_1, \quad \left. \vphantom{\frac{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}_E} \varepsilon_{ij} \cdot x_{ij} \cdot b_{ij}(\omega_{ij}^-) \right] \cdot P(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} P(\omega)}}} \right\} i \in \mathcal{I}_Q.$$

$$= 0, \quad \omega_1 \notin \Omega_1,$$

Beschränkt man sich nur auf $\omega_1 \in \Omega_1$, dann sind die $\omega \in \Omega(\omega_1)$ selbstverständliche Elemente von Ω und $b_{ij}(\omega_{ij}^-)$ im Zähler kann entfallen. Dann erhält man mittels Gl.(III.3.2) und Gl.(III.1.4b)

$$\theta_{iio}(\omega_1) = \varepsilon_{io} \cdot x_{iio}, \quad i \in \mathcal{I}_Q, \quad \omega_1 \in \Omega_1. \quad (\text{III.3.110})$$

Entsprechend der Bedeutung von $\theta_{iio}(\omega_1)$ als Sterbekoeffizient kann man die Definition auch auf Zahlentupel $\omega_1 \notin \Omega_1, \omega_1 \in \Omega_{1e}$ ausdehnen. Dazu ist analog zu Gl.(II.2.13) die rechte Seite von Gl.(III.3.110) mit $b_{iio}(\omega_{iio}^-)$ zu multiplizieren (betroffs $b_{iio}(\omega_{iio}^-)$ siehe Gl.(III.3.102)):

$$\theta_{iio}(\omega_1) = \varepsilon_{io} \cdot x_{iio} \cdot b_{iio}(\omega_{iio}^-), \quad i \in \mathcal{I}_Q, \quad \omega_1 \in \Omega_{1e}. \quad (\text{III.3.111})$$

Schrifttumsverzeichnis

- [1] Bear, D.: The Use of "Pure Chance" and "Smoothed" Traffic Load Curves in Telephone Engeneering, International Teletraffic Congress, The Hague (1958), Document 17
- [2] Beneš, V.E.: Mathematical theory of connecting networks and telephone traffic. New York, London, Academic Press (1965)
- [3] Bininda, N. und Hofstetter, H.: Modelle für die Simulation des Fernsprechverkehrs bei mehrstufigen Koppelanordnungen. NTZ 7 (1963), S. 353-357
- [4] Bretschneider, G., Wendt, A.: Datenverarbeitungsanlagen als Hilfsmittel für die Fernsprech- und Fernschreibverkehrsplanung. NTZ 10 (1961), S. 487-492
- [5] Brockmeyer, Hallstroem, Jensen: The Life and Works of A.K. Erlang. Trans. Danish Acad. T. Sciences., No. 2 (1948), Copenhagen
- [6] Cohen, J.W.: The generalized Erlangformula. Philips Telecommunications Review (1957), 18, S. 158-170
- [7] Dietrich, G. und Wagner, H.: Simulation von Fernsprechverkehr mit elektronischen Rechensautomaten. Elektr. Nachrichtenwesen Band 38 (1963), Nr. 4, S. 538-548
- [8] Dietrich, G. und Wagner, H.: Bestimmung der Verkehrsleistung von Verlustsystemen durch künstl. Fernsprechverkehr, NTZ 6 (1963), S. 289-296
- [9] Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications. John Wiley and Sons, Vol. 1 (3. Edition 1968), Vol. 2 (1. Edition 1966)
- [10] Führer, R.: Landesfernwahl, I,II. München, Wien, R. Oldenbourg (1966, 1968)
- [11] Hettwig, V.E., Rode, K.: Neue Berechnungsverfahren für die Entwicklung von Telefonsystemen. Siemens-Zeitschrift 30, No. 1, S. 1-10 (Jan. 1956)
- [12] Lundkvist, K.: Analysis of general theory for telephone traffic. Ericsson Technics 2, No. 1, 3-32 (1955)
- [13] Lundkvist, K.: General Theory for Telephone Traffic. Ericsson Technics 9, No. 2, S. 111-140 (1953)
- [14] Molina, E.C.: The Theory of Probabilities applied to telephone trunking Systems. Bell Sys. Tech. J. 1, S. 69-81 (1922)
- [15] Mina, R.R.: Some practical applications of Teletraffic Theory. Trebook of 5. Internat. Teletraffic Congress New York (1967), Rockefeller University, S. 426

- [16] Namneck, P.: Vergleich von Zufallsgeneratoren. Elektron. Rechenanlagen 8, Heft 1, S. 28-32 (1966)
- [17] Newland, W.F.: A Method of Approach and Solution to some fundamental Traffic Problems, P.O. Elect. Engrs. J. 25, S. 119-131 (1932-33)
- [18] Noevius, G.: Artificial Traffic Trials Using Digital Computers. Ericsson Technics 11 (1955), S. 279-291
- [19] O'Dell, G.F.: Theoretical principles of the traffic capacity of automatic switches. P.O. Elect. Engrs. J. 13, S. 209 (1920)
- [20] O'Dell, G.F.: An outline of trunking aspect of automatic telephony, J. Inst. Elect. Engrs. 65, S. 185-222 (1927)
- [21] Prabhu, N.U.: Stochastic Processes. McMillan Comp., New York (1965)
- [22] Reß, H.: Erzeugung von Zufallszahlen und deren Untersuchung. Diplomarbeit am Lehrstuhl f. Instr. Math., TH Stuttgart (Jan. 1965)
- [23] Riordan, J.: Stochastic Service Systems. John Wiley and Sons, New York, London (1962)
- [24] Rohde, K., Störmer, H.: Durchlaßwahrscheinlichkeit bei Vermittlungseinrichtungen der Fernmeldetechnik. Mitt.-Bl. Math. Statist. 5, No. 2-3 (1953)
- [25] Schmitt, G.: Einführung in die Vermittlungstechnik. München, Wien, R. Oldenbourg (1965)
- [26] Störmer, H. u.a.: Verkehrstheorie. R. Oldenbourg München, Wien (1966)
- [27] Syski, R.: Introduction to Congestion Theory in Telephone Systems. Oliver and Boyd, Edinburgh and London (1960)
- [28] Syski, R.: "Markovian Queues" in "Proceedings of the Symposium on Congestion Theory", edited by W.L. Smith and W.E. Wilkinson. The University of North Carolina Press, Chapel Hill (1965)
- [29] Wilkinson, R.I.: Theories for Toll Traffic Engineering in the USA. Bell Syst. Tech. J. 35, S. 421-514 (1956)

L e b e n s l a u f

25.1.1938: Geboren in Kempten/Allg. als erstes Kind des Werkführers Adolf Dirlewanger und seiner Ehefrau Josephine, geb. Schindele.

1944-1948: Besuch der Volksschule Kempten/Allg.

1948-1957: Besuch der Oberrealschule Kempten/Allg.
mit abschließender Reifeprüfung.

1957-1963: Studium der Elektrotechnik, Fachrichtung Nachrichtentechnik, an der Technischen Hochschule Stuttgart.
Diplomarbeit bei Professor Wolman über ein impulstechnisches Thema.

1963: 3/4-jährige Tätigkeit im Institut für Flugnavigation der Technischen Hochschule Stuttgart als wissenschaftlicher Mitarbeiter (Arbeitsgebiet: Entwurf und Bau von Flugnavigationsrechnern).

1964-1970: Wissenschaftlicher Assistent am Universitätsrechenzentrum Stuttgart. Arbeitsgebiete: Betrieb von Rechenanlagen, Rechnerentwicklung, Systemprogrammierung, Datendokumentationssysteme, Fernsprechverkehrstheorie. Daneben Lehrtätigkeit (u.a. Lehrauftrag über "Physikalische und elektrotechnische Grundlagen").

Seit 1971: Leiter der Rechnerbetriebsgruppe am Institut für Informatik an der Universität Stuttgart. Arbeitsgebiete: Kommandosprachen, Fernsprechverkehrstheorie, technische und organisatorische Leitung der Informatikrechenanlagen, Lehrtätigkeit (Lehraufträge über "Physikalische und elektrotechnische Grundlagen" und "Kommandosprachen").

